

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BỘ XÂY DỰNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ GIAO THÔNG VẬN TẢI

TRẦN QUANG MINH

PHÂN TÍCH PHI TUYẾN VỀ ỔN ĐỊNH VÀ ĐỘNG LỰC
CỦA CẤU KIỆN TẤM – VỎ NANOCOMPOSITE CÓ GÂN
TĂNG CỨNG TRONG KẾT CẤU CÔNG TRÌNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT

HÀ NỘI - 2025

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BỘ XÂY DỰNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ GIAO THÔNG VẬN TẢI

TRẦN QUANG MINH

**PHÂN TÍCH PHI TUYẾN VỀ ỔN ĐỊNH VÀ ĐỘNG LỰC
CỦA CẤU KIỆN TẤM – VỎ NANOCOMPOSITE CÓ GÂN
TĂNG CỨNG TRONG KẾT CẤU CÔNG TRÌNH**

NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

MÃ SỐ: 9580206

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

1. PGS. TS. Vũ Hoài Nam

2. PGS. TS. Đặng Thùy Đông

HÀ NỘI - 2025

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi.

Các số liệu, kết quả nêu trong luận án là trung thực, đáng tin cậy và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Trần Quang Minh

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn chính là PGS.TS. Vũ Hoài Nam và cô hướng dẫn phụ là PGS.TS. Đặng Thùy Đông đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ, tạo mọi điều kiện thuận lợi và thường xuyên động viên để tác giả hoàn thành luận án này.

Tác giả xin cảm ơn tập thể các thành viên của nhóm nghiên cứu mạnh Cơ học Vật liệu và Kết cấu tiên tiến - Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải đã giúp đỡ, động viên và hỗ trợ mọi điều kiện cần thiết trong quá trình nghiên cứu của tác giả.

Tác giả trân trọng cảm ơn tập thể các thầy cô giáo Viện Công nghệ Giao thông vận tải, phòng Đào tạo Sau Đại học, trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải đã luôn quan tâm, giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong suốt thời gian tác giả học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, các bạn bè thân thiết và đồng nghiệp của tác giả, những người đã luôn ở bên cạnh động viên và giúp đỡ tác giả hoàn thành luận án này.

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU.....	1
CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU.....	5
1.1. Các loại vật liệu cơ tính biến thiên.....	5
1.1.1. Vật liệu cơ tính biến thiên truyền thống.....	5
1.1.2. Composite gia cường Carbon nanotube cơ tính biến thiên.....	5
1.1.3. Composite gia cường Graphene cơ tính biến thiên.....	8
1.2. Tình hình nghiên cứu trong và ngoài nước.....	14
1.2.1. Các nghiên cứu về kết cấu tấm vỏ FGM.....	14
1.2.2. Các nghiên cứu về kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC.....	16
1.2.3. Các nghiên cứu về kết cấu tấm vỏ FG-GPLRC.....	19
1.2.4. Các nghiên cứu về kết cấu tấm vỏ FG-GRC và FG-GRMMC.....	20
1.3. Tiềm năng ứng dụng vật liệu Nanocomposite và kết cấu tấm vỏ Nanocomposite trong kỹ thuật xây dựng công trình.....	21
1.3.1. Tiềm năng ứng dụng của vật liệu Nanocomposite.....	21
1.3.2. Tiềm năng ứng dụng của kết cấu tấm và vỏ Nanocomposite.....	22
1.4. Những kết quả đã đạt được trong nước và quốc tế.....	24
1.5. Kết luận chương 1 và những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu.....	25
CHƯƠNG 2. ỔN ĐỊNH VÀ ĐỘNG LỰC PHI TUYẾN CỦA TẤM TRÒN VÀ CHÔM CẦU THOẢI FG-GPLRC TĂNG CƯỜNG BỞI HỆ GÂN MẠNG NHỆN.....	26
2.1. Mô hình kết cấu và vật liệu.....	27
2.1.1. Mô hình kết cấu.....	27
2.1.2. Mô hình vật liệu.....	29
2.2. Các phương trình cơ bản và phương pháp giải.....	33
2.2.1. Các công thức và phương trình cơ bản.....	33
2.2.2. Dạng nghiệm đa thức và giải bài toán.....	37
2.3. Kết quả số và thảo luận.....	40
2.3.1. Kết quả so sánh.....	40

2.3.2. Bài toán 1: Ổn định cơ nhiệt phi tuyến tĩnh của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC có gân mạng nhện 2 vùng.....	41
2.3.3. Bài toán 2: Ổn định cơ nhiệt phi tuyến tĩnh và động của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng.....	47
2.3.4. Bài toán 3: Ổn định cơ nhiệt phi tuyến tĩnh và động của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện ba vùng.....	53
2.3.5. Bài toán 4: Dao động phi tuyến của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng.....	59
2.3.6. Bài toán 5: Dao động phi tuyến của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện ba vùng.....	64
2.4. Kết luận Chương 2.....	70
CHƯƠNG 3. ỔN ĐỊNH VÀ ĐỘNG LỰC PHI TUYẾN CỦA PANEL FG-CNTRC VÀ FG-GRC CÓ ĐỘ CONG PHỨC TẠP VÀ GÂN TĂNG CỨNG TRỰC GIAO.....	71
3.1. Thiết kế hình dạng và thông số vật liệu của panel trụ, panel parabol và panel hình sin FG-CNTRC và FG-GRC.....	72
3.1.1. Mô hình panel FG-CNTRC có gân tăng cứng FG-CNTRC và có lớp áp điện.....	72
3.1.2. Mô hình panel FG-GRC có gân tăng cứng trên nền đàn hồi Pasternak.....	74
3.2. Cơ sở lý thuyết và kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến	76
3.3. Điều kiện biên, xấp xỉ hàm ứng suất và phương trình Euler-Lagrange....	80
3.4. Kết quả số và thảo luận.....	88
3.4.1. Kết quả so sánh.....	88
3.4.2. Bài toán 1: Ổn định và động lực phi tuyến của panel FG-CNTRC có gân tăng cứng và lớp áp điện.....	90
3.4.3. Bài toán 2: Panel FG-GRC có gân tăng cứng trên nền đàn hồi.....	99
3.5. Kết luận Chương 3.....	104

CHƯƠNG 4. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI TÍNH PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ FG-GPLRC VÀ FG-GPLRC RỒNG CÓ GÂN TĂNG CỨNG TRỰC GIAO VÀ XOẮN ỐC.....	106
4.1. Mô hình kết cấu và vật liệu.....	107
4.1.1. Mô hình 1: Vỏ trụ FG-GPLRC rồng có gân tăng cứng trực giao.....	107
4.1.2. Mô hình 2: Vỏ trụ FG-GPLRC có gân tăng cứng FG-GPLRC xoắn óc.....	108
4.2. Hệ phương trình chủ đạo.....	110
4.3. Điều kiện biên và hàm ứng suất.....	113
4.4. Phương pháp năng lượng Ritz.....	114
4.5. Kết quả số và thảo luận.....	117
4.5.1. Kết quả so sánh.....	117
4.5.2. Các ví dụ số.....	118
4.6. Kết luận chương 4.....	123
KẾT LUẬN.....	125
KIẾN NGHỊ VỀ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO.....	127
DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN.....	128
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	130
PHỤ LỤC.....	150

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

FGM	Functionally Graded Material - Vật liệu cơ tính biến thiên.
FG-CNTRC	Functionally graded carbon nanotube-reinforced composite – Composite cơ tính biến thiên gia cường ống nano các bon.
FG-GPLRC	Functionally graded graphene platelets reinforced composite – Composite cơ tính biến thiên gia cường graphene platelet
FG-GRC	Functionally graded graphene reinforced composite – Composite cơ tính biến thiên gia cường graphene sheet
SWCNT	Ống nano các bon đơn vách - Single-Walled Carbon Nanotube
CNT	Ống nano các bon - Carbon nanotube
PMMA	Poly(methyl methacrylate)
m	Số nửa sóng theo phương x .
n	Số nửa sóng (sóng) theo phương y của tấm (vỏ trụ).
E, G	Mô đun Young và Mô đun trượt tương ứng (Pa)
p	Tải nén dọc trục của vỏ trụ trên một đơn vị diện tích (N/m ²)
q	Áp lực ngoài phân bố đều trên bề mặt vỏ (N/m ²)
ν	Hệ số Poisson.
α	Hệ số dẫn nở nhiệt.
η_1, η_2, η_3	Các tham số hiệu dụng của CNT
u, v, w	Các thành phần chuyển vị của tấm (vỏ) (m)
ε, γ	Biến dạng pháp và biến dạng trượt của tấm (vỏ)
σ	Ứng suất của tấm (vỏ) (Pa)
T	Nhiệt độ môi trường (K)
K_1, K_2, K_3	Các thành phần độ cứng của nền đàn hồi phi tuyến (N/m ³ , N/m, N/m ⁵)
V_{CNT}	Tỷ phần thể tích CNT theo bề dày
V_{CNT}^*	Tỷ phần thể tích CNT trung bình trong tấm (vỏ)
L, R, h	Chiều dài, bán kính và bề dày vỏ trụ, tương ứng (m)
Snap-through	Hiện tượng mất ổn định đột ngột hoặc chuyển trạng thái đột ngột
FSDT	Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (First-order shear deformation theory)

HSDT	Lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (Higher-order shear deformation theory)
UD, FG-X, FG-O, FG-V và FG-A	Các quy luật phân bố ống nano các bon, graphene, hoặc lỗ rỗng trong nền đẳng hướng

DANH MỤC CÁC BẢNG

Bảng 2.1. So sánh tải nhiệt tới hạn của tấm tròn FGM không có gân tăng cứng.....	40
Bảng 2.2. So sánh hệ số tần số dao động tự do tuyến tính không thứ nguyên của chòm cầu đẳng hướng.....	41
Bảng 2.3. Tải tới hạn nhiệt động của tấm tròn không gân FG-GPLRC.....	53
Bảng 2.4. Tần số dao động tự nhiên (rad/s) của tấm tròn và chòm cầu với các quy luật phân bố và tỷ phần khối lượng GPL khác nhau.....	59
Bảng 3.1. So sánh tần số không thứ nguyên đối với panel XC FG-CNTRC không gân.....	89
Bảng 3.2. Các thông số tần số cơ bản của panel trụ FG-GRC không gân.....	89
Bảng 3.3. Tải trọng tới hạn mất ổn định động của các panel FG-CNTRC không gân và không có lớp áp điện.....	93
Bảng 3.4. Ảnh hưởng của mô hình phân bố CNT và hướng của gân lên tần số cơ bản của panel.....	96
Bảng 3.5. Tần số cơ bản của panel trụ, panel parabol và panel hình sin có gân và không gân.....	99
Bảng 4.1. So sánh tải áp lực ngoài mất ổn định tới hạn của vỏ trụ FGM với các chỉ số đặc trưng tỷ phần thể tích khác nhau.....	117
Bảng 4.2. So sánh áp lực ngoài mất ổn định tới hạn đối với vỏ trụ có gân và không gân đẳng hướng.....	117
Bảng 4.3. Tải mất ổn định tới hạn của vỏ trụ có gân FG-GPLRC rỗng có phân bố độ rỗng và hệ số độ rỗng khác nhau.....	118
Bảng 4.4. Tải mất ổn định tới hạn của vỏ trụ FG-GPLRC không gân, gân trực giao và gân xoắn ốc.....	121

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ, ĐỒ THỊ

Hình 1.1. Quy luật phân bố tỷ phần thể tích graphene sheet.....	13
Hình 1.2. Khả năng ứng dụng tấm vỏ composite tiên tiến vào kết cấu công trình [31, 74, 103, 163].....	23
Hình 2.1. Hệ trục toạ độ và mô hình chòm cầu thoải và tấm tròn được tăng cứng bởi gân mạng nhện hai vùng.....	27
Hình 2.2. Hệ trục toạ độ và mô hình chòm cầu thoải và tấm tròn được tăng cứng bởi gân mạng nhện ba vùng.....	28
Hình 2.3. Các loại phân bố GPL của chòm cầu và gân.....	30
Hình 2.4. Thiết kế quy luật phân bố của các lớp mặt và gân tăng cứng.....	32
Hình 2.5. So sánh đường cong sau mất ổn định của chòm cầu thoải S-FGM không có gân tăng cứng.....	41
Hình 2.6. Ảnh hưởng của gân tăng cứng và loại gân tăng cứng lên ứng xử sau mất ổn định của chòm cầu thoải/tấm tròn FG-GPLRC.....	42
Hình 2.7. Ảnh hưởng của nhiệt độ và số lượng gân tăng cứng lên các đường cong sau mất ổn định cơ học của chòm cầu thoải/tấm tròn FG-GPLRC.....	43
Hình 2.8. Đường cong sau mất ổn định phi tuyến của chòm cầu/tấm tròn FG-GPLRC có gân tăng cứng với các quy luật phân bố vật liệu khác nhau.....	44
Hình 2.9. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng của GPL lên ứng xử sau mất ổn định phi tuyến của các chòm cầu/tấm tròn FG-GPLRC có gân tăng cứng.....	45
Hình 2.10. Ảnh hưởng của các độ cứng nền phi tuyến và thông số hình học lên ứng xử sau mất ổn định của chòm cầu/tấm tròn FG-GPLRC có gân tăng cứng.....	46
Hình 2.11. Đường cong sau mất ổn định tĩnh của tấm tròn và chòm cầu có gân mạng nhện ba vùng chịu áp lực ngoài.....	48
Hình 2.12. Đường cong sau mất ổn định tĩnh của tấm tròn và chòm cầu có gân ba vùng chịu tải nhiệt.....	50
Hình 2.13. Đáp ứng động mất ổn định của tấm tròn và chòm cầu có gân ba vùng chịu áp lực ngoài.....	51
Hình 2.14. Đáp ứng động mất ổn định của tấm tròn và chòm cầu có gân ba vùng chịu tải nhiệt.....	52

Hình 2.15. Đường cong sau mất ổn định tĩnh của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện ba vùng chịu tải trọng cơ.....	54
Hình 2.16. Đường cong sau mất ổn định tĩnh của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện ba vùng chịu tải trọng nhiệt.....	56
Hình 2.17. Đáp ứng mất ổn định động của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân ba vùng chịu tải cơ.....	57
Hình 2.18. Đáp ứng mất ổn định động của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân ba vùng chịu tải nhiệt.....	58
Hình 2.19. Đường cong đáp ứng biên độ tần số của dao động tự do và cưỡng bức đối với tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng.....	60
Hình 2.20. Đường cong mặt phẳng pha biên độ-vận tốc của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng.....	61
Hình 2.21. Đường cong biên độ - thời gian của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC với các loại gân và thông số vật liệu khác nhau.....	62
Hình 2.22. Đường cong biên độ - thời gian của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng với các thông số hình học khác nhau.....	63
Hình 2.23. Đường cong biên độ - thời gian của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện với các hệ số cản, nhiệt độ, điện áp và độ cứng nền khác nhau.....	64
Hình 2.24. Đường cong tần số-biên độ của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện.....	65
Hình 2.25. Đáp ứng dao động thời gian-biên độ của các tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện.....	66
Hình 2.26. Ảnh hưởng của lõi rỗng lên đáp ứng dao động thời gian-biên độ của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện.....	67
Hình 2.27. Ảnh hưởng của các thông số vật liệu và hình học đến đáp ứng dao động biên độ - thời gian của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện.....	68
Hình 2.28. Đáp ứng dao động thời gian-biên độ của các tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện.....	69

Hình 3.1. Mô hình thiết kế và mô hình phân bố của CNT cho các panel có gân và lớp áp điện.....	73
Hình 3.2. Mô hình vật liệu và hình học của panel trụ, panel parabol và panel hình sin có gân tăng cứng.....	75
Hình 3.3. So sánh đáp ứng dao động phi tuyến của panel trụ FGM sandwich với Đặng Thùy Đông và Đào Văn Dũng [32].....	90
Hình 3.4. Ảnh hưởng của hướng của gân, quy luật phân bố và tỷ phần thể tích CNT, độ nâng, nhiệt độ môi trường, và khoảng cách gân tới đường cong sau mất ổn định tĩnh của panel chịu áp lực ngoài.....	91
Hình 3.5. Ảnh hưởng của loại panel, hướng của gân, quy luật phân bố và tỷ phần thể tích CNT, độ nâng và nhiệt độ môi trường tới đường cong sau mất ổn định tĩnh của panel chịu nén dọc trục.....	92
Hình 3.6. Ảnh hưởng của loại panel, độ nâng mặt phẳng giữa và hướng của gân đến đáp ứng mất ổn định động của panel có và không gân.....	94
Hình 3.7. Ảnh hưởng của quy luật phân bố CNT và mô hình phân bố của CNT đến đáp ứng mất ổn định động của các panel có và không gân.....	95
Hình 3.8. Ảnh hưởng của loại panel, gân, tỷ lệ thể tích CNT và mô hình phân bố CNT đến đáp ứng dao động của panel.....	97
Hình 3.9. Ảnh hưởng của lớp áp điện và tần số cưỡng bức đến đáp ứng dao động của panel.....	98
Hình 3.10. Đường cong độ võng-vận tốc của các panel có gân YS-YD.....	98
Hình 3.11. Đường cong biên độ-tần số của dao động tự do và cưỡng bức của panel trụ, panel parabol và panel hình sin có và không gân.....	100
Hình 3.12. Dao động phi tuyến của panel trụ, panel parabol và panel hình sin có và không gân.....	101
Hình 3.13. Mất ổn định động của panel trụ, panel parabol và panel hình sin có và không gân.....	104
Hình 4.1. Mô hình và thông số hình học của vỏ trụ FG-GPLRC rỗng có gân trục giao FG-GPLRC rỗng.....	107

Hình 4.2. Hình dạng, hệ tọa độ và phân bố vật liệu của vỏ trụ FG-GPLRC và gân FG-GPLRC xoắn ốc.....	109
Hình 4.3. Ảnh hưởng của gân FG-GPLRC rỗng đến đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC rỗng.....	119
Hình 4.4. Ảnh hưởng của các thông số hình học và vật liệu đến đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC rỗng có gân.....	120
Hình 4.5. Ảnh hưởng của loại gân và các thông số vật liệu đến đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC.....	122
Hình 4.6. Ảnh hưởng của các thông số hình học của vỏ và gân đến đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC.....	123

MỞ ĐẦU

Phân tích ổn định và động lực phi tuyến là một trong những vấn đề phức tạp nhưng cũng là cốt lõi trong cơ học kết cấu, đặc biệt với các kết cấu công trình hiện đại thường yêu cầu về vật liệu, tính thẩm mỹ và khả năng chịu tải. Với các tấm và vỏ được làm từ vật liệu có khả năng chịu biến dạng lớn như các loại composite tiên tiến, việc nghiên cứu ổn định và động lực phi tuyến không chỉ là căn cứ chính trong quá trình thiết kế kết cấu mà còn giúp dự đoán trạng thái làm việc và có thêm các hiểu biết về ứng xử phi tuyến phức tạp của kết cấu.

Sự ra đời mang tính bước ngoặt của các loại vật liệu nanocomposite tiên tiến với các đặc tính cơ, nhiệt điện ưu việt có thể mở ra một kỷ nguyên mới trong lĩnh vực kỹ thuật công trình. Trong khi các tiêu chuẩn thiết kế kết cấu công trình hiện nay chỉ dựa trên các phân tích tuyến tính hình học với vật liệu đẳng hướng, các phân tích này chỉ phù hợp cho trạng thái làm việc trong miền độ võng nhỏ với các loại vật liệu cơ bản. Việc mở rộng phạm vi làm việc của kết cấu ở miền độ võng lớn và rất lớn cho vật liệu nanocomposite kèm theo đặc tính dị hướng phức tạp, có thể dẫn tới những thay đổi về quan điểm và triết lý thiết kế kết cấu công trình. Vì thế việc nghiên cứu tính toán kết cấu làm việc trong miền độ võng lớn với tính dị hướng mạnh nhằm từng bước mở rộng, thay đổi triết lý thiết kế và xây dựng các tiêu chuẩn thiết kế trong thời đại mới ngày càng cấp thiết.

Các loại Nanocomposite tiên tiến phổ biến bao gồm: a) composite cơ tính biến thiên gia cường ống nano carbon (FG-CNTRC), b) composite cơ tính biến thiên gia cường graphene sheet (FG-GRC), c) composite cơ tính biến thiên gia cường graphene platelet (FG-GPLRC) đã và đang được nhiều nhà khoa học quan tâm với mục tiêu áp dụng trong các kết cấu kỹ thuật, đặc biệt là trong kết cấu công trình.

Để tăng khả năng chịu tải các kết cấu tấm và vỏ làm từ các loại Nanocomposite tiên tiến này, việc sử dụng gân tăng cứng là một giải pháp mang lại hiệu quả cao. Vì vậy, các bài toán về ổn định phi tuyến và động lực của tấm và vỏ Nanocomposite có gân tăng cứng là cần thiết, từ đó không chỉ ứng xử của kết cấu được hiểu rõ hơn mà còn để đóng góp vào việc xây dựng các tiêu chuẩn thiết kế mới, đáp ứng yêu cầu ngày càng cao của ngành công trình trong kỷ nguyên mới.

Xuất phát từ những vấn đề cấp thiết trên, mục tiêu chính của luận án là tập trung nghiên cứu về “*Phân tích phi tuyến về ổn định và động lực của cấu kiện tấm - vỏ Nanocomposite có gân tăng cứng trong kết cấu công trình*”.

Mục tiêu của luận án

1. Đề xuất các thiết kế tăng cứng bằng gân mạng nhện cho tấm tròn và chỏm cầu thoải FG-GPLRC và FG-GPLRC lõi rỗng trong kết cấu công trình; đề xuất quy luật phân bố graphene trong gân và xây dựng lời giải giải tích và bán giải tích cho bài toán ổn định và động lực phi tuyến của kết cấu chịu các dạng tải trọng khác nhau.

2. Đề xuất các thiết kế tăng cứng bằng hệ gân trực giao cho panel có độ cong phức tạp làm bằng FG-CNTRC và FG-GRC; xây dựng lời giải giải tích và bán giải tích cho bài toán ổn định và động lực phi tuyến của kết cấu chịu tải trọng cơ trong môi trường nhiệt có xét tới ảnh hưởng của lớp áp điện và nền đàn hồi phi tuyến.

3. Đề xuất các thiết kế tăng cứng bằng hệ gân trực giao và gân xoắn ốc cho kết cấu vỏ trụ FG-GPLRC rỗng và FG-GPLRC; cải tiến kỹ thuật san tác dụng cho gân xoắn ốc, xây dựng lời giải giải tích và bán giải tích cho bài toán ổn định tĩnh phi tuyến của kết cấu.

4. Dựa trên các lời giải mới xây dựng được, luận án thực hiện khảo sát số dựa trên cơ sở các bộ số liệu cụ thể về vật liệu, kích thước hình học của kết cấu. Từ đó có thể minh họa các ứng xử ổn định và động lực phi tuyến của kết cấu thông qua các bảng số liệu hoặc đồ thị minh họa trực quan, thảo luận chi tiết các kết quả nhận được; đưa ra một số nhận xét để có thể sử dụng cho việc tính toán thiết kế các kết cấu công trình và những lưu ý ban đầu để thiết lập các tiêu chuẩn thiết kế chuyên ngành của các kết cấu nanocomposite.

Luận án tiếp tục mở rộng và phát triển các nghiên cứu của các luận án gần đây về ứng xử của kết cấu tấm vỏ nanocomposite khi xem xét cả bài toán ổn định và động lực cho các kết cấu có gân, một số loại gân đặc biệt được xem xét như gân mạng nhện, gân xoắn ốc, với các kết cấu có hình dạng phức tạp như các panel hình sin, panel parabol. Ngoài ra, khác với một số luận án có liên quan gần đây thường sử dụng phương pháp Galerkin, luận án xây dựng các lời giải cho các bài toán dựa trên phương pháp năng lượng với một số ưu điểm nhất định và phù hợp hơn với các kết cấu làm bằng các loại vật liệu composite bất đối xứng.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng: Các kết cấu tấm và vỏ phổ biến trong kết cấu công trình như: Panel, vỏ cầu thoải, tấm tròn và vỏ trụ.

Phạm vi nghiên cứu: Bài toán phi tuyến về ổn định và động lực.

Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết. Trong đó, tập trung vào áp dụng các lý thuyết, thuật toán cơ học và toán học để cải tiến các kỹ thuật hiện có và xây dựng các lời giải cho các bài toán mới.

Luận án sử dụng phương pháp năng lượng, lý thuyết vỏ Donnell, biến dạng trượt bậc cao. Đồng thời, hai phương án tiếp cận theo hàm ứng suất hoặc theo chuyển vị được sử dụng phù hợp với từng bài toán.

Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án

Ý nghĩa khoa học:

+ Đề xuất các loại gân tăng cứng phù hợp cho các tấm và vỏ Nanocomposite trong kết cấu công trình trong từng trường hợp và quy luật phân bố vật liệu phù hợp.

+ Xây dựng các kỹ thuật san tác dụng gân mới phù hợp với loại gân đề xuất và phù hợp với lý thuyết sử dụng.

+ Xây dựng các lời giải mới cho các kết cấu và vật liệu cụ thể được xem xét trong luận án.

Ý nghĩa thực tiễn:

+) Panel, vỏ cầu thoải, tấm tròn và vỏ trụ được luận án xem xét, đều là các loại cấu kiện thông dụng trong công trình và có tính ứng dụng cao. Các kết cấu này được cải thiện đáng kể về khả năng chịu tải nhờ các gân tăng cứng, trong khi lượng vật liệu gân thêm vào là không đáng kể, đây cũng là phương án phổ biến đã và đang được ứng dụng trong công trình.

+) Các loại Nanocomposite như FG-GPLRC, FG-GPLRC rỗng, FG-CNTRC và FG-GRC với các đặc trưng cơ nhiệt ưu việt và những lợi thế vượt trội khi so sánh với các vật liệu truyền thống và do vậy chúng có tiềm năng ứng dụng rộng rãi trong công trình trong tương lai. Hiện tại, khi giá thành còn đắt đỏ, chúng có thể là lựa chọn ưu tiên trong những chi tiết, cấu kiện công trình đặc biệt.

+) Các lời giải thu được đều dưới dạng giải tích và bán giải tích, có thể sử dụng ngay và dễ dàng vào tính toán thiết kế công trình trong thực tế .

+) Kết quả của luận án sẽ là tài liệu tham khảo đáng tin cậy trong việc phát triển tiêu chuẩn thiết kế mới dành cho các loại kết cấu này trong tương lai.

Nói chung, luận án đưa ra những lời giải và nhận xét từ đó có thể dễ dàng ứng dụng, mang lại hiệu quả trong việc thiết kế các kết cấu Nanocomposite trong lĩnh vực xây dựng hiện đại.

Bố cục của luận án

Bố cục chính của luận án gồm chương tổng quan và ba chương chính, mỗi chương xem xét một trường hợp kết cấu cụ thể và xây dựng các lời giải, kỹ thuật riêng biệt cho từng trường hợp.

- Chương 1: Tổng quan về các loại nanocomposite cơ tính biến thiên với các đặc trưng cơ nhiệt và tiềm năng ứng dụng trong công trình xây dựng, các nghiên cứu liên quan trong và ngoài nước từ đó xác định các nội dung nghiên cứu cho luận án.

- Chương 2: Ổn định và động lực phi tuyến của tấm tròn và chòm cầu thoải FG-GPLRC có gân mạng nhện.

- Chương 3: Ổn định và động lực phi tuyến của panel FG-CNTRC và FG-GRC có độ cong phức tạp và gân tăng cứng trực giao

- Chương 4: Ổn định đàn hồi phi tuyến tĩnh của vỏ trụ FG-GPLRC và FG-GPLRC rỗng có gân tăng cứng trực giao và xoắn ốc

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

1.1. Các loại vật liệu cơ tính biến thiên

1.1.1. Vật liệu cơ tính biến thiên truyền thống

Vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) truyền thống là loại vật liệu tiên tiến với đặc tính thay đổi dần dần về thành phần vật liệu theo một hướng cụ thể [2, 4, 5, 73]. Đây là sự kết hợp của hai hoặc nhiều vật liệu, thông thường là ceramic và kim loại, nhằm tận dụng ưu điểm của từng thành phần. FGM chịu được nhiệt độ cao, chống mài mòn tốt và vẫn đảm bảo độ dẻo dai, khắc phục các hạn chế như tính giòn hay nứt vỡ của ceramic. Sự thay đổi trơn và liên tục về tỉ lệ thành phần giúp giảm ứng suất tập trung trong vật liệu và cải thiện độ bền của kết cấu. Vật liệu này được ứng dụng rộng rãi trong hàng không vũ trụ, cơ khí, công nghệ y sinh và đặc biệt là trong công trình xây dựng. Sự đa dạng và tiềm năng ứng dụng của FGM khiến nó trở thành một trong những vật liệu quan trọng được tập trung nghiên cứu trong khoa học vật liệu.

Tỷ phần thể tích của các thành phần ceramic và kim loại thường được thiết kế theo quy luật lũy thừa theo phương z trên bề dày kết cấu h , như sau [2, 4, 5]:

$$\begin{aligned} V_c(z) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^N, \\ V_m(z) &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^N, \end{aligned} \quad (1.1)$$

với N là chỉ số đặc trưng tỷ phần thể tích, các chỉ số dưới c và m tương ứng chỉ thành phần ceramic và kim loại.

Bằng cách áp dụng quy tắc hỗn hợp, tính chất hiệu dụng Pr như mô đun đàn hồi E , mật độ khối lượng ρ , hệ số Poisson ν , hệ số giãn nở nhiệt α ,... của FGM được ước lượng bằng biểu thức [2, 4, 5]:

$$Pr(z) = Pr_c V_c(z) + Pr_m V_m(z). \quad (1.2)$$

1.1.2. Composite cơ tính biến thiên gia cường Carbon nanotube

Carbon nanotube (CNT) là vật liệu nano cấu thành từ các nguyên tử carbon liên kết bằng liên kết cộng hóa trị mạnh, sắp xếp trong một mạng lưới lục giác [3, 6]. Cấu trúc cơ bản của CNT có thể hình dung như một tấm graphene được cuộn lại thành hình ống với đường kính từ vài nanomet đến vài chục nanomet, chiều dài có thể lên đến

hàng trăm micromet. Với cấu trúc hình ống bao gồm các nguyên tử carbon sắp xếp theo mạng lục giác, CNT được chia thành hai loại chính là CNT đơn vách (SWCNT) và CNT đa vách (MWCNT). CNT được biết đến với độ bền kéo rất cao, có thể đạt đến 63 GPa, gấp 100 lần thép nhưng chỉ nhẹ bằng 1/6 lần thép. Điều này khiến CNT trở thành lựa chọn hàng đầu với các công trình đòi hỏi vật liệu bền và nhẹ. Khả năng chịu tải trọng động lực học cũng vượt trội cũng giúp CNT có thể chịu được các điều kiện khắc nghiệt. CNT có tính dẫn điện vượt trội nhờ cấu trúc đối xứng và các electron trong liên kết π của carbon có khả năng di chuyển tự do. Khả năng này tương tự như các vật liệu dẫn điện tốt nhất, chẳng hạn đồng, nhưng CNT lại có trọng lượng nhẹ hơn đáng kể. CNT có khả năng dẫn nhiệt rất cao, độ dẫn nhiệt dọc theo trục ống lên đến 3500 W/m·K. Chính vì vậy mà CNT trở thành loại vật liệu lý tưởng để tản nhiệt trong các kết cấu. CNT có khả năng chống oxy hóa và ăn mòn tốt. Ở nhiệt độ phòng, CNT bền vững với môi trường hóa học khắc nghiệt. Nhiệt độ chịu nhiệt tối đa của CNT có thể đạt trên 2800 K trong điều kiện chân không. Hiện nay, các nghiên cứu đang tập trung vào việc tối ưu hóa quy trình tổng hợp CNT để phát triển các tính chất và giảm giá thành, từ đó thúc đẩy việc ứng dụng CNT rộng rãi trong thực tế. Có thể thấy rằng CNT không chỉ tạo cơ hội đổi mới công nghệ mà còn đặt nền tảng cho các hướng phát triển vật liệu nano trong tương lai.

Vật liệu composite cơ tính biến thiên gia cường bằng ống nano carbon (FG-CNTRC) được đề xuất bởi Shen [126] là sự kết hợp giữa vật liệu nền đẳng hướng với CNT được phân bố theo quy luật thay đổi liên tục trong kết cấu. Trong đó, CNT sẽ được phân bố theo các hướng và tỷ lệ khác nhau nhằm tối ưu hóa các đặc tính cơ, nhiệt và khả năng chịu tải. Khi nghiên cứu tấm hoặc vỏ FG-CNTRC được chế tạo từ SWCNT và vật liệu nền đẳng hướng, một nhiệm vụ quan trọng là xác định các đặc tính cơ nhiệt hiệu dụng của vật liệu. Đây là yếu tố then chốt để phân tích và thiết kế kết cấu chịu tải. Để giải quyết vấn đề này, hai mô hình cơ học vi mô phổ biến thường được áp dụng là mô hình Mori-Tanaka và quy tắc hỗn hợp. Mô hình Mori-Tanaka phân tích ứng xử của các pha vật liệu khi có phân bố không đồng nhất. Điểm mạnh của mô hình này là khả năng dự đoán chính xác các đặc tính cơ học hiệu dụng trong các trường hợp vật liệu gia cường có sự phân bố khác nhau trong nền. Đặc biệt, mô hình này có thể mô phỏng ảnh hưởng của hình dạng, kích thước và hướng của CNT

trong FG-CNTRC, giúp đánh giá chi tiết hơn về tương tác giữa các pha vật liệu. Mô hình này thường được sử dụng khi phân bố CNT theo bề dày không đều hoặc khi các đặc tính của từng thành phần có sự chênh lệch đáng kể. Trong khi đó, quy tắc hỗn hợp là một phương pháp đơn giản và trực quan, mô hình này sử dụng công thức bình quân gia quyền để ước lượng các đặc tính cơ nhiệt hiệu dụng. Phương pháp này giả định rằng mỗi thành phần của vật liệu đóng góp vào tính chất tổng thể theo tỷ lệ thể tích của nó trong toàn bộ kết cấu. Quy tắc hỗn hợp thích hợp cho các trường hợp phân bố đều và đơn giản hóa việc tính toán các đại lượng như mô đun Young (E), mô đun trượt (G) và hệ số Poisson (ν). Với nhiều đặc tính ưu việt chẳng hạn như: độ bền cơ học cao, tính dẫn nhiệt tốt, khả năng chống nứt gãy và khả năng chịu được biến dạng lớn, vật liệu FG-CNTRC phù hợp cho các kết cấu chịu nhiệt độ cao hoặc làm việc trong môi trường khắc nghiệt. Các nghiên cứu đã tập trung vào phân tích ứng xử của dầm, tấm và vỏ composite FG-CNTRC để tối ưu hóa thiết kế kết cấu. FG-CNTRC hiện được xem là vật liệu tiềm năng trong các lĩnh vực như hàng không vũ trụ, công trình xây dựng, công trình biển và các công trình đặc biệt khác.

Theo quy tắc hỗn hợp mở rộng, các mô đun đàn hồi và mô đun trượt hiệu dụng E_{11}, E_{22} , và G_{12} của vật liệu có thể được biểu diễn dựa trên các tỷ phần thể tích V_{CNT} và V_m ($V_{CNT} + V_m = 1$) và tính chất của các thành phần, như sau [3, 6, 126]:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E^m, \\ \frac{\eta_2}{E_{22}} &= \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E^m}, \\ \frac{\eta_3}{G_{12}} &= \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G^m}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

trong đó các tham số hiệu dụng của CNT η_i ($i=1,2,3$) xác định bằng cách so sánh mô đun đàn hồi và trượt của FG-CNTRC nhận được từ kết quả của quy tắc hỗn hợp với kết quả mô phỏng động lực phân tử.

Tỷ phần thể tích CNT V_{CNT} của tấm vỏ FG-CNTRC được thiết kế biến đổi liên tục theo bề dày, biểu diễn bởi :

$$V_{CNT} = V_{CNT}^* f(z), \quad (1.4)$$

trong đó $f(z)$ được chọn là một hàm liên tục theo bề dày và:

$$V_{CNT}^* = \frac{w_{CNT}}{w_{CNT} + (\rho_{CNT} - \rho_{CNT} w_{CNT}) / \rho_m}, \quad (1.5)$$

trong đó ρ_{CNT} và ρ_m là mật độ của CNT và vật liệu nền đẳng hướng, w_{CNT} là tỷ phần khối lượng của CNT. Bằng cách sử dụng phương trình (1.4), các quy luật phân bố CNT sẽ có cùng tỷ phần khối lượng của CNT.

Theo hướng CNT và hướng trục giao, hệ số giãn nở nhiệt trục hướng được ước lượng dựa trên quy luật hỗn hợp [126] dựa trên các hệ số giãn nở nhiệt của CNT và của nền đẳng hướng $\alpha_{11}^{CNT}, \alpha_{22}^{CNT}$ và α^m , như sau:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= V_{CNT} \alpha_{11}^{CNT} + V_m \alpha^m, \\ \alpha_{22} &= (1 + \nu_{12}^{CNT}) V_{CNT} \alpha_{22}^{CNT} + (1 + \nu^m) V_m \alpha^m - \nu_{12} \alpha_{11}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Hệ số Poisson của kết cấu FG-CNTRC cũng có thể dự đoán bằng cách tương tự [126], nhận được:

$$\nu_{12} = V_{CNT}^* \nu_{12}^{CNT} + V_m \nu^m. \quad (1.7)$$

Để đơn giản, giả thiết rằng: $\eta_2 = \eta_3$ và $G_{12} = G_{13} = G_{23}$.

1.1.3. Composite cơ tính biến thiên gia cường Graphene

Graphene, một dạng thù hình của carbon, với cấu trúc hai chiều gồm các nguyên tử carbon liên kết sp² tạo thành mạng lục giác, là loại vật liệu nhẹ nhất và mạnh nhất mà con người từng phát hiện [23]. Với độ dày chỉ bằng một lớp nguyên tử, graphene sở hữu những tính chất cơ, nhiệt và điện vượt trội, vượt xa các vật liệu truyền thống. Điện trở suất của graphene đạt $10^6 \Omega \cdot \text{cm}$, nhỏ hơn đồng tới 35%, trong khi độ dẫn nhiệt lên đến $5300 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, gấp 10 lần đồng. Về cơ học, độ bền của graphene gấp khoảng 100 lần thép, với tỉ trọng chỉ 0.77 mg/m^2 và độ trong suốt đạt mức hấp thụ ánh sáng chỉ 2.3%.

Những tính chất độc đáo này khiến graphene trở thành ứng viên lý tưởng trong việc gia cường vật liệu nền như polymer hoặc kim loại, tạo ra các nanocomposite có hiệu suất cơ, nhiệt và điện vượt trội. Việc bổ sung graphene, ngay cả với hàm lượng nhỏ, giúp cải thiện rõ rệt các đặc tính cơ học và giảm trọng lượng kết cấu. Nhờ diện tích bề mặt lớn và cấu trúc hai chiều, graphene hình thành liên kết tốt hơn với vật liệu nền so với các vật liệu nano khác như CNT.

Graphene platelet (GPL) và graphene sheet là các dạng của graphene, trong đó Graphene platelet là các mảnh nhỏ của graphene có độ dày từ vài lớp đến hàng chục lớp nguyên tử carbon, với kích thước ngang nhỏ hơn và diện tích bề mặt hạn chế, dễ dàng hơn cho các ứng dụng như gia cường trong vật liệu composite. Trong khi đó, graphene sheet là một lớp graphene đơn, có diện tích lớn hơn và tính chất 2D nổi bật, dẫn tới liên kết tốt hơn với vật liệu nền và mang lại hiệu quả gia cường lớn hơn so với graphene platelet và CNT.

Ứng dụng của graphene trong các loại composite gia cường đang được nghiên cứu rộng rãi trong các lĩnh vực như công trình biển, dân dụng và giao thông. Những vật liệu này không chỉ giúp tăng cường độ bền và khả năng chịu lực mà còn cải thiện khả năng dẫn nhiệt, giảm trọng lượng và tối ưu hóa hiệu suất. Đặc biệt, phương án thiết kế cơ tính biến thiên cho phép điều chỉnh sự phân bố graphene trong vật liệu nền, góp phần tối ưu hóa các đặc tính cơ học của nanocomposite trong các điều kiện khác nhau [62].

Các loại composite cơ tính biến thiên gia cường Graphene là Composite cơ tính biến thiên gia cường graphene platelet (FG-GPLRC), Composite cơ tính biến thiên gia cường graphene sheet với nền polymer (FG-GRC) và Composite cơ tính biến thiên gia cường graphene sheet với nền kim loại (FG-GRMMC) được quan tâm hàng đầu trong khoảng tám năm gần đây [26, 51, 132, 133]. Cơ tính biến thiên trong trường hợp này được thể hiện theo hai cách, theo nghĩa chính xác, là sự thay đổi trơn và liên tục của tỷ phần thể tích graphene theo bề dày kết cấu, hoặc theo nghĩa gần đúng, là sự biến đổi từng phần của tỷ phần thể tích Graphene theo từng lớp. Từ đó hình thành một số quy luật phân bố UD, FG-A, FG-V, FG-O, FG-X, với quy luật biến đổi từng phần thì trong mỗi lớp có tỷ phần thể tích Graphene là hằng số nhưng biến đổi dần qua nhiều lớp vật liệu khác nhau theo bề dày kết cấu.

Bằng cách gia cường Graphene platelet trong nền polymer/kim loại đẳng hướng và với tỷ phần khối lượng của GPL được biến đổi trơn/từng phần theo bề dày thành kết cấu tạo thành vật liệu bất đẳng hướng FG-GPLRC. Phức tạp hơn so với FG-GPLRC là FG-GRC hay FG-GRMMC. Với các sắp xếp “Graphene sheet” trong nền polymer/kim loại đẳng hướng theo phương armchair hoặc zigzag, một lớp composite trục hướng được tạo thành. Khi thay đổi tỷ phần thể tích graphene trong các lớp theo

bề dày kết cấu, vật liệu tạo thành sẽ có cả tính chất của FGM và composite lớp truyền thống. Ngoài ra, do tương tác nano giữa graphene và nền, FG-GRC/FG-GRMMC còn mang các hiệu ứng nano đặc biệt, dẫn tới các ứng xử cơ học khác thường của kết cấu. Cũng do sự phức tạp của các phương trình cơ học, dẫn tới các bài toán phân tích tấm vỏ phân lớp FG-GRC/FG-GRMMC có thể gặp nhiều thách thức về toán học.

1.1.3.1. Composite cơ tính biến thiên gia cường Graphene platelet (FG-GPLRC)

Mô hình Halpin -Tsai được sử dụng để xác định mô đun đàn hồi của FG-GPLRC như sau [26, 51]:

$$\bar{E}_{sh} = \frac{1}{8} \left[\frac{3(1 + \bar{m}_1 \bar{n}_1 \bar{V}_G^{sh}) E_m}{1 - \bar{n}_1 \bar{V}_G^{sh}} + \frac{5(1 + \bar{m}_2 \bar{n}_2 \bar{V}_G^{sh}) E_m}{1 - \bar{n}_2 \bar{V}_G^{sh}} \right], \quad (1.8)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= \frac{-E_m + E_G}{\bar{m}_1 E_m + E_G}, & \bar{n}_2 &= \frac{-E_m + E_G}{\bar{m}_2 E_m + E_G}, \\ \bar{m}_1 &= 2 \frac{a_G}{t_G}, & \bar{m}_2 &= 2 \frac{b_G}{t_G}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

với các mô đun đàn hồi của pha nền và GPL được ký hiệu là E_m và E_G , a_G , b_G , t_G lần lượt là các ký hiệu về chiều dài, chiều rộng và độ dày của GPL và $\bar{V}_G^{sh}$ là tỷ phần thể tích của GPL ($\bar{V}_m^{sh} + \bar{V}_G^{sh} = 1$), được định nghĩa là:

$$\bar{V}_G^{sh} = \frac{\rho_m \Lambda_G^{sh}}{\rho_m \Lambda_G^{sh} + \rho_G - \rho_G \Lambda_G^{sh}}, \quad (1.10)$$

với ρ_m và ρ_G lần lượt là mật độ của nền và GPL, Λ_G^{sh} là tỷ phần khối lượng của GPL biến đổi theo bề dày kết cấu với các hàm sau:

$$\Lambda_G^{sh}(z) = \begin{cases} \Lambda_G & \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) & \text{UD-GPLRC,} \\ 4\frac{|z|}{h}\Lambda_G & \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) & \text{X-GPLRC,} \\ 2\left(1 - \frac{2|z|}{h}\right)\Lambda_G & \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) & \text{O-GPLRC,} \\ \left(1 - \frac{2z}{h}\right)\Lambda_G & \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) & \text{V-GPLRC,} \\ \left(1 + \frac{2z}{h}\right)\Lambda_G & \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) & \text{A-GPLRC,} \end{cases} \quad (1.11)$$

trong đó Λ_G là ký hiệu tỷ phần khối lượng trung bình của GPL.

Hệ số giãn nở nhiệt, hệ số Poisson và mật độ có thể ước lượng bằng quy luật hỗn hợp bởi:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{sh}(z) &= \alpha_m(1 - \bar{V}_G^{sh}) + \alpha_G \bar{V}_G^{sh}, \\ \bar{\nu}_{sh}(z) &= \nu_m(1 - \bar{V}_G^{sh}) + \nu_G \bar{V}_G^{sh}, \\ \bar{\rho}_{sh}(z) &= \rho_m(1 - \bar{V}_G^{sh}) + \rho_G \bar{V}_G^{sh}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.1.3.2. Composite cơ tính biến thiên gia cường Graphene sheet (FG-GRC)

Hai hướng của graphene sheet được xác định là hướng zigzag và hướng aimchair. Hướng zigzag của graphene sheet là theo hướng dọc của vỏ và được xác định bởi (lớp 0) trong khi hướng chu vi được xác định bởi (lớp 90). Lớp vỏ và các gân được cấu tạo từ nhiều lớp GRC và ba cách kết hợp các hướng được xem xét là $(0)_{10}$, $(0/90/0/90/0)_S$ và $(0/90)_{5T}$. Ngoài ra, năm quy luật phân bố graphene được nghiên cứu là FG-O, FG-X, UD, FG-V và FG-A (xem Hình 1.1).

Tỷ phần thể tích graphene được tăng dần từ lớp GRC bên dưới đến lớp GRC bên trên đối với FG-A và ngược lại đối với FG-V. Tỷ phần thể tích graphene với hai loại phân bố graphene sheet theo mười lớp đối với FG-V được ký hiệu là $[(0.11)_2/(0.09)_2/(0.07)_2/(0.05)_2/(0.03)_2]$ và $[(0.03)_2/(0.05)_2/(0.07)_2/(0.09)_2/(0.11)_2]$ đối với FG-A. Tỷ phần thể tích graphene thay đổi đối xứng từ mặt phẳng giữa của vỏ, $[0,11/0,09/0,07/0,05/0,03]_S$ đối với FG-O và $[0.03/0.05/0.07/0.09/0.11]_S$ với FG-X. Với phân bố UD, tỷ phần thể tích graphene không đổi ($V_G = 0.07$) cho tất cả các lớp.

Mô đun đàn hồi trục hướng và mô đun trượt các lớp FG-GRC được ước lượng bằng cách sử dụng mô hình Halpin –Tsai, được tính như sau:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \eta_1 \frac{1 + 2(a_G / h_G) \gamma_{11}^G V_G}{1 - \gamma_{11}^G V_G} E^m, \\ E_{22} &= \eta_2 \frac{1 + 2(b_G / h_G) \gamma_{22}^G V_G}{1 - \gamma_{22}^G V_G} E^m, \\ G_{12} &= \eta_3 \frac{1}{1 - \gamma_{12}^G V_G} G^m. \end{aligned} \quad (1.13)$$

với:

$$\gamma_{11}^G = \frac{E_{11}^G / E^m - 1}{E_{11}^G / E^m + 2a_G / h_G}, \gamma_{22}^G = \frac{E_{22}^G / E^m - 1}{E_{22}^G / E^m + 2b_G / h_G}, \gamma_{12}^G = \frac{G_{12}^G / G^m - 1}{G_{12}^G / G^m}, \quad (1.14)$$

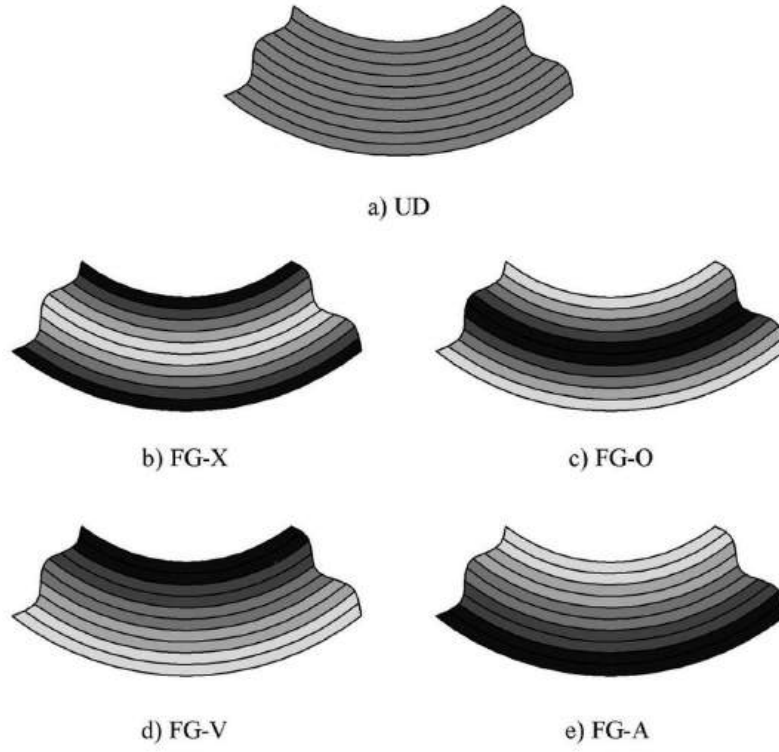
trong đó V_m và V_G lần lượt là tỷ phần thể tích của graphene và nền đẳng hướng, trong đó $V_G + V_m = 1$. a_G và b_G lần lượt là chiều dài và chiều rộng của graphene, h_G là độ dày hiệu dụng của graphene. E^m và G^m là mô đun đàn hồi và mô đun trượt của nền đẳng hướng. Graphene sheet là một vật liệu trục hướng với các mô đun đàn hồi trục hướng và mô đun trượt lần lượt được ký hiệu là E_{11}^G , E_{22}^G và G_{12}^G . Trong phương trình (1.13), các thông số hiệu dụng của graphene được ký hiệu bởi η_j ($j=1, 2, 3$) được xác định như trong báo cáo của Shen và các cộng sự [132, 133]).

Hệ số giãn nở nhiệt của các lớp GRC theo hai hướng của kết cấu có thể được xác định bằng [132, 133]:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{V_G E_{11}^G \alpha_{11}^G + V_m E^m \alpha^m}{V_G E_{11}^G + V_m E^m}, \\ \alpha_{22} &= (1 + \nu_{12}^G) V_G \alpha_{22}^G + (1 + \nu^m) V_m \alpha^m - \nu_{12} \alpha_{11}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

trong đó α_{11}^G , α_{22}^G và ν_{12}^G tương ứng là hệ số giãn nở nhiệt và hệ số Poisson của graphene sheet. α^m và ν^m lần lượt là hệ số giãn nở nhiệt và hệ số Poisson của nền đẳng hướng.

Trong luận án này, PMMA được áp dụng cho nền đẳng hướng với $\alpha^m = 45(1 + 0.0005\Delta T) \times 10^{-6} / K$ và $E^m = (-0.0034T + 3.52)$ GPa, $\nu^m = 0.34$, với nhiệt độ môi trường $T = T_0 + \Delta T$ và $T_0 = 300$ K (nhiệt độ phòng).



Hình 1.1. Quy luật phân bố tỷ phần thể tích graphene sheet

Hệ số Poisson của các lớp GRC được tính bằng cách sử dụng công thức:

$$v_{12} = V_G v_{12}^G + V_m v^m. \quad (1.16)$$

Hệ số Poisson, hệ số giãn nở nhiệt, các mô đun đàn hồi trục hướng, mô đun trượt của graphene sheet được xác định:

$$\begin{aligned} v_{12}^G &= 0.177, \\ \alpha_{11}^G &= \left(\begin{array}{c} -3.83788 + T \times 1.416 \times 10^{-2} \\ -T^2 \times 16.3355 \times 10^{-6} + T^3 \times 0.633589 \times 10^{-8} \end{array} \right) \times 10^{-6} / K, \\ \alpha_{22}^G &= \left(\begin{array}{c} -3.73997 + T \times 1.296 \times 10^{-2} \\ -T^2 \times 13.5033 \times 10^{-6} + T^3 \times 0.460392 \times 10^{-8} \end{array} \right) \times 10^{-6} / K, \\ E_{11}^G &= \left(\begin{array}{c} 2.16637 - T \times 1.93 \times 10^{-3} \\ + T^2 \times 2937.01 \times 10^{-9} - T^3 \times 0.151775 \times 10^{-8} \end{array} \right) TPa, \\ E_{22}^G &= \left(\begin{array}{c} 2.16868 - T \times 1.93 \times 10^{-3} \\ + T^2 \times 2859.54 \times 10^{-9} - T^3 \times 0.145145 \times 10^{-8} \end{array} \right) TPa, \\ G_{12}^G &= \left(\begin{array}{c} 0.53514 + T \times 82.4436 \times 10^{-5} \\ -T^2 \times 1293.2 \times 10^{-9} + T^3 \times 0.578507 \times 10^{-9} \end{array} \right) TPa. \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.2. Các nghiên cứu liên quan trong và ngoài nước

1.2.1. Các nghiên cứu về kết cấu tấm vỏ FGM

Trong khoảng hai thập kỷ gần đây, nghiên cứu về ứng xử cơ học của các kết cấu dầm, tấm, vỏ FGM [73, 86] là một hướng nghiên cứu được quan tâm đặc biệt. Nhiều nhà khoa học đã tập trung phân tích ứng xử ổn định và động lực của các kết cấu FGM bằng các tiếp cận số hoặc giải tích khác nhau.

Nhóm nghiên cứu của Shen [124, 129, 130] chủ yếu áp dụng lý thuyết biến dạng trượt với các thành phần phi tuyến hình học của von Karman và sử dụng phương pháp nhiễu để phân tích ứng xử ổn định tĩnh và dao động của các kết cấu panel và vỏ trụ FGM chịu tải cơ và nhiệt. Trong đó Shen [124] đã sử dụng HSDT để phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGM chịu nén dọc trục với tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ, kỹ thuật nhiễu đơn và mô hình nền hai hệ số Pasternak cũng được sử dụng. Cũng sử dụng kỹ thuật nhiễu đơn và HSDT, Shen [129] đã phân tích bài toán phi tuyến về ổn định panel trụ FGM với các tính chất hiệu dụng của FGM được ước lượng dựa trên mô hình cơ học vi mô của Mori-Tanaka. Trong khi đó, Shen [130] đã phân tích dao động phi tuyến của panel trụ FGM dựa trên kỹ thuật nhiễu hai bước và các tính chất hiệu dụng của FGM được xem xét theo cả hai mô hình cơ học vi mô của Voigt và Mori-Tanaka. Sử dụng phương pháp Galerkin, Sofiyev và các cộng sự [143-145] tập trung vào ứng xử ổn định tĩnh và động của vỏ trụ FGM nhiều lớp chịu các điều kiện tải trọng khác nhau. Dao động và ổn định của vỏ trụ FGM sandwich chịu áp lực thủy tĩnh phân bố đều được phân tích bởi Sofiyev [143] dựa theo FSDT khi xét tới dạng nghiệm hiển của tần số dao động tự do tuyến tính và áp lực thủy tĩnh tới hạn được xác định. Sofiyev và các cộng sự [144] đã phân tích ổn định nén dọc trục và tần số dao động tuyến tính của vỏ trụ sandwich lõi FGM có xét tới hiệu ứng quán tính quay và ứng suất trượt ngang của vỏ. Sofiyev và Kuruoglu [145] đã nghiên cứu bài toán ổn định động của vỏ trụ FGM ba lớp chịu nén dọc trục định kỳ theo lý thuyết vỏ Donnell cải tiến. Hong [60] đã sử dụng phương pháp vi phân toàn phương tổng quát (GDQ) để phân tích ảnh hưởng của HSDT đến dao động nhiệt của tấm và vỏ trụ FGM dày. Ảnh hưởng của hệ số hiệu chỉnh cắt phi tuyến, chỉ số đặc trưng tỷ phần thể tích FGM và nhiệt độ môi trường tới ứng suất nhiệt và chuyển vị trung tâm của kết cấu đã được khảo sát và thảo luận chi tiết. Đáp ứng động lực phi tuyến và cộng

hưởng của vỏ trụ sandwich FGM trong môi trường phức tạp, chuyển động dọc trục, đã được nghiên cứu bởi Liu và các cộng sự [78] bằng phương pháp tiếp diễn chiều dài cung giả (pseudo-arc length continuation method) và phương pháp Runge-Kutta bậc bốn. Elmhaja và các cộng sự [48] tập trung vào ứng xử ổn định của vỏ trụ FGM chịu nén dọc trục. Sử dụng phương pháp số tiệm cận (ANM), lập trình trên Matlab và kết hợp với phần mềm Abaqus để đánh giá ảnh hưởng của các yếu tố phi tuyến của kết cấu FGM từ đó tiến hành so sánh các trường hợp phân bố vật liệu khác nhau. Bài toán điều khiển chủ động về mất ổn định động đột ngột của vỏ cầu thoải FGM với lớp cảm biến áp điện và bộ truyền động áp điện được nghiên cứu bởi Javani và các cộng sự [64] sử dụng FSDT, nguyên lý Hamilton, phương pháp GDQ và phương pháp Newton-Raphson. He và các cộng sự [55] đã khảo sát dao động tự do và cưỡng bức của vỏ trụ/nón/cầu và khuyên kép FGM với các điều kiện biên và liên kết khác nhau sử dụng kỹ thuật lò xo ảo nhân tạo và phương pháp Rayleigh-Ritz.

Nhiều nhóm nghiên cứu của Việt Nam cũng đóng góp nhiều công bố về kết cấu tấm, vỏ FGM trong những năm vừa qua [2, 4, 5, 13-20, 32, 33, 38-40, 44-47, 88-91, 93, 108, 111]. Các công bố này phân tích ứng xử của tấm và vỏ với hình dạng khá đa dạng như tấm, panel trụ, vỏ thoải hai độ cong, vỏ trụ, vỏ cầu thoải... sử dụng lý thuyết tấm, vỏ khác nhau và chủ yếu dùng phương pháp Galerkin để giải. Tăng khả năng chịu lực bằng gân tăng cứng là một giải pháp được sử dụng phổ biến trong nhiều kết cấu kỹ thuật. Cách làm này có ưu điểm là tăng khả năng chịu lực của kết cấu một cách rõ rệt mà chỉ cần bổ sung lượng gân không đáng kể.

Nghiên cứu về ứng xử của các kết cấu tấm vỏ FGM có gân tăng cứng cũng được nhiều tác giả trong nước và ngoài nước quan tâm đặc biệt trong khoảng một thập kỷ vừa qua [2, 4, 5, 20, 32, 38, 41, 44-47, 88-90, 93]. Để đảm bảo điều kiện về tính liên tục của vật liệu giữa tấm/vỏ và gân tăng cứng, phương án đầu tiên là gân tăng cứng làm bằng vật liệu đẳng hướng [4,5, 17-20, 45], nếu gân đặt ở mặt Ceramic thì được làm hoàn toàn bằng Ceramic và nếu đặt ở mặt kim loại thì được làm hoàn toàn bằng kim loại. Kỹ thuật san tác dụng gân của Lekhnitskii được áp dụng để tính tới ảnh hưởng của gân tăng cứng. Phương án thứ hai được đề xuất là gân làm bằng vật liệu FGM [2, 32, 44, 46, 47, 93], trong đó quy luật phân bố vật liệu cần đảm bảo cùng vật liệu tại mặt tiếp xúc giữa tấm/vỏ và gân. Phương án này đòi hỏi cần cải tiến kỹ thuật

san tác dụng gân của Lekhnitskii dành cho gân FGM. Sau đó, kỹ thuật san tác dụng gân tiếp tục được cải tiến bằng cách kết hợp với kỹ thuật chuyển đổi hệ trục tọa độ để mô phỏng ảnh hưởng của gân xiên/xoắn ốc tới ổn định phi tuyến của tấm/vỏ FGM [2, 33, 88-91]. Kết quả cho thấy thiết kế gân xiên/xoắn ốc thu được hiệu quả đáng kể so với gân trục giao nếu cùng một lượng gân và thông số mặt cắt gân cũng như khoảng cách giữa các gân.

1.2.2. Các nghiên cứu về tấm vỏ FG-CNTRC

Cũng với ý tưởng tương tự vật liệu FGM, người ta có thể bố trí CNT một cách đồng phương với tỷ phần thể tích biến thiên trong không gian để đạt được khả năng chịu tải tốt hơn, tạo thành một vật liệu composite mới có tên quốc tế là Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite (FG-CNTRC). Phân tích ứng xử cơ học của các kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC cũng là một vấn đề được nhiều tác giả trên thế giới quan tâm trong khoảng gần 1 thập kỷ vừa qua.

Đầu tiên, Shen và các cộng sự [126-128, 131] đã phân tích ứng xử ổn định và dao động phi tuyến của các kết cấu tấm, panel trụ và vỏ trụ FG-CNTRC bằng phương pháp nhiễu và HSDT. Ổn định phi tuyến của tấm FG-CNTRC chịu tải nhiệt với tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ dựa trên HSDT đã được khảo sát với Shen và Zhang [126] có xét đến độ võng không hoàn hảo ban đầu. Shen và Xiang [131] đã nghiên cứu bài toán dao động phi tuyến của panel trụ FG-CNTRC có xét đến tương tác vỏ và nền đàn hồi Pasternak và nhiệt độ môi trường. Ổn định phi tuyến của vỏ trụ FG-CNTRC chịu áp lực ngoài và nén dọc trục đã được khảo sát bởi Shen [127, 128] sử dụng kỹ thuật nhiễu đơn và xét tới ảnh hưởng của nhiệt độ đến tính chất vật liệu.

Kiani [66, 67] nghiên cứu ứng xử ổn định và dao động tuyến tính của tấm FG-CNTRC có và không có lớp vật liệu áp điện. Ổn định trượt của tấm FG-CNTRC theo FSDT, dùng công thức Ritz hai chiều và đa thức cơ bản Chebyshev đã được trình bày bởi Kiani [66]. Cũng sử dụng phương pháp và lý thuyết tương tự cùng với phương trình Maxwell, Kiani [67] đã khảo sát dao động tự do của tấm FG-CNTRC tích hợp với các lớp áp điện. Alibeigloo và Liew [7] đã sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều, chuỗi Fourier và kỹ thuật không gian trạng thái để tìm nghiệm chính xác của bài toán uốn cơ nhiệt tuyến tính của panel trụ FG-CNTRC. Dao động tự do và ổn định tuyến tính của tấm tứ giác và tấm nghiêng FG-CNTRC được nghiên cứu bởi Lei và các

cộng sự [77] bằng cách dùng phương pháp Ritz cải tiến với bình phương nhỏ nhất di động (improved moving least-squares Ritz) và FSDT. Phương pháp phần tử tự nhiên hai chiều và phương pháp lặp Newton-Raphson được áp dụng để phân tích đối với bài toán uốn phi tuyến của tấm FG-CNTRC bởi Cho [28] có xét đến ảnh hưởng của nền đàn hồi. Kumar và Jana [75] đã phân tích dao động của tấm FG-CNTRC đặt trên nền đàn hồi không đồng nhất dựa trên FSDT, nguyên lý Hamilton và phần tử tấm loại Lévy. Zeighami và Jafari [170] đã sử dụng phương pháp biến phức phát triển để giải bài toán ứng suất nhiệt trong các tấm composite FG-CNTRC không đối xứng với lỗ dưới dòng nhiệt đều. Dao động tự do của các tấm sandwich gấp nếp có lõi rỗng và lớp phủ FG-CNTRC đã được nghiên cứu bởi Salehipour và các cộng sự [54] bằng cách áp dụng FSDT để tìm ra các phương trình chuyển động, sau đó các tác giả sử dụng phương pháp GDQ hai chiều để rời rạc hóa chúng.

Trong những năm gần đây, bằng các phương pháp và lý thuyết khác nhau, nhiều nghiên cứu đã tập trung phân tích các panel FG-CNTRC, đơn cử như ổn định cơ nhiệt của panel sandwich FG-CNTRC lõi nhẹ [24], ổn định tuyến tính của panel trụ FG-CNTRC có lỗ vuông chịu nén dọc trục [10], ổn định nhiệt tuyến tính của panel FG-CNTRC với mô hình chuyển vị đa thức bậc cao [82].

Nghiên cứu về dao động phi tuyến đối xứng và bất đối xứng trục của vỏ trụ sandwich FG-CNTRC với lõi lưới auxetic được thực hiện bởi Yadav [164] dựa trên FSDT và phương pháp độ dài cung giả. Khayat và các cộng sự [72] đã sử dụng mô hình Chebyshev kết hợp với các đường cong động để đánh giá xác suất ổn định động của các vỏ trụ FG-CNTRC với lớp áp điện, dựa trên lý thuyết phi tuyến Sanders và HSDT, cùng với phương pháp vi phân cầu phương Fourier.

Nhiều nhà khoa học cũng đã quan tâm nghiên cứu một số loại vỏ phức tạp khác. Raissi [119] đã sử dụng lý thuyết từng lớp kết hợp với HSDT để phân tích phân bố ứng suất theo thời gian của vỏ cầu sandwich ba lớp lõi FG-CNTRC và mặt ngoài áp điện, dưới tác động của áp lực nổ.

Ứng xử dao động và ổn định rẽ nhánh của vỏ nón FG-CNTRC đã được phân tích bởi Mehri và các cộng sự [83] sử dụng lý thuyết động học phi tuyến Green–Lagrange và lý thuyết vỏ phi tuyến Novozhilov dựa trên phép khai triển lượng giác theo phương chu vi và phương pháp vi phân cầu phương điều hòa (HDQ). Sử dụng

lý thuyết vỏ Donnell cải tiến, FSDT và phương pháp Galerkin, Sofiyev và các cộng sự [146] đã thiết lập một lời giải giải tích cho bài toán ổn định tuyến tính vỏ nón FG-CNTRC chịu áp lực ngoài.

Với vỏ ghép, ổn định nhiệt tuyến tính của vỏ ghép nón – nón được phân tích bởi Zhao và các cộng sự [171] bằng cách dùng phương pháp GDQ, lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và tiêu chuẩn cân bằng lân cận. Sobhani và Safaei [142] đã khảo sát tần số dao động của vỏ ghép bán cầu – trụ FG-CNTRC với lỗ rỗng trên nền đàn hồi bằng cách sử dụng FSDT và phương pháp GDQ.

Các tác giả trong nước cũng có nhiều các nghiên cứu đáng quan tâm về vật liệu này [3, 6, 34-36, 41-43, 56-58, 84, 92, 94, 150-154], trong đó tập trung nghiên cứu ứng xử ổn định và dao động phi tuyến của kết cấu. Bằng cách sử dụng các lý thuyết khác nhau và phương pháp Galerkin, các bài toán phi tuyến về ổn định cơ nhiệt, đáp ứng động lực và dao động kết cấu vỏ thoải hai độ cong và vỏ nón FG-CNTRC đã được phân tích bởi nhóm tác giả Nguyễn Đình Đức và các cộng sự [41-43]. Bằng phương pháp tương tự, các kết cấu tấm, panel trụ, vỏ thoải hai độ cong và vỏ trụ FG-CNTRC đã được xem xét bởi nhóm tác giả Hoàng Văn Tùng và các cộng sự [3, 56-58, 151-154, 157] trong các bài toán ổn định cơ và nhiệt phi tuyến, trong đó nhấn mạnh vào ảnh hưởng của điều kiện biên đàn hồi tới ứng xử của kết cấu. Nhóm tác giả Vũ Hoài Nam và các cộng sự [92, 94] đã đề xuất phương án gia cường CNT theo hai phương trục giao để khắc phục nhược điểm về mô đun đàn hồi rất nhỏ theo phương trục giao với CNT và tiến hành khảo sát ổn định phi tuyến của vỏ trụ FG-CNTRC trục giao chịu nén dọc trục và tải xoắn tương ứng.

Với kết cấu tấm và vỏ FG-CNTRC có gân tăng cứng, do đặc điểm dị hướng mạnh và đặc điểm liên tục của các đặc trưng cơ tính của FG-CNTRC, nhóm tác giả của trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải đã đề xuất phương án tăng cứng cho kết cấu tấm và vỏ FG-CNTRC bằng các gân tăng cứng cũng làm bằng FG-CNTRC [6, 34-36, 84, 150]. Bằng cách kết hợp kỹ thuật san tác dụng gân cổ điển và lý thuyết dầm dị hướng, độ cứng của gân FG-CNTRC được mô phỏng bằng một kỹ thuật cải tiến, được gọi là kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến, trong đó các gân được đặt theo các phương trục giao của kết cấu (phương ngang và dọc với tấm, phương dọc và vòng với vỏ trụ).

1.2.3. Các nghiên cứu về tấm vỏ FG-GPLRC

Nghiên cứu về ứng xử cơ nhiệt của kết cấu tấm vỏ FG-GPLRC cũng được nhiều tác giả tham gia.

Gholami và Ansari [51] đã nghiên cứu dao động cưỡng bức điều hòa của tấm FG-GPLRC bằng cách sử dụng HSDT, phương pháp Galerkin và phương pháp tiếp cận chiều dài cung giả (Pseudo arc-length continuation), có xét đến tính phi tuyến hình học và quán tính quay của tấm. Các nghiên cứu khác về ứng xử tĩnh và động của tấm FG-GPLRC cũng đã được nghiên cứu bởi Yang và các cộng sự [166] với lõi lưới chóp, Chen và các cộng sự [26] với chất lỏng tĩnh, Song và các cộng sự [147] với bài toán dao động cơ nhiệt khí động flutter và Namazinia và các cộng sự [105] với môi trường nhiệt ẩm.

Sử dụng FSDT và phương pháp phần tử hữu hạn đẳng tham số chín nút với năm bậc tự do mỗi nút, Bidzard và các cộng sự [21] đã nghiên cứu về panel trống FG-GPLRC với các cạnh ràng buộc xoay đàn hồi. Phân tích hỗn loạn (Chaos) và rẽ nhánh của panel cầu FG-GPLRC đã được phân tích bởi Chen và Li [25] sử dụng HSDT và nguyên lý Hamilton. Barati và Zenkour [11] đã phân tích dao động tự do của vỏ trụ FG-GPLRC sử dụng FSDT và phương pháp Galerkin với các lỗ rỗng được phân bố đối xứng và bất đối xứng qua mặt trung bình của vỏ. Ổn định nén dọc trục và xoắn của vỏ trụ FG-GPLRC có và không có lỗ cắt đã được nghiên cứu bởi Wang và các cộng sự [158, 159] bằng cách sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn. Hu và các cộng sự [61] đã khảo sát động lực hình học phổ của vỏ trụ FG-GPLRC với bộ hấp thụ dao động theo chu kỳ sử dụng FSDT và phương pháp phổ hình học. Với kết cấu vỏ nón, Yang và các cộng sự [165], Saboori và Ghadiri [121] và Gao và các cộng sự [50] đã phân tích ứng xử nội cộng hưởng [165], nội và ngoại cộng hưởng [121] và phổ hình học của dao động ngẫu nhiên [50] của vỏ nón FG-GPLRC. Yang và các cộng sự [167] đã khảo sát dao động tự do và cưỡng bức đối xứng / bất đối xứng của tấm hình khuyên FG-GPLRC quay chịu tải khí động học.

Dựa trên lý thuyết Lord-Shulman và phương pháp vi phân từng lớp (Layerwise Differential Quadrature Method), Yasin và các cộng sự [168] đã phân tích ứng xử cơ nhiệt của vỏ cầu FG-GPLRC với sơ đồ tích phân theo bước thời gian mới được đề xuất. Nguyễn Thị Phương và các cộng sự [114], Lê Ngọc Lý và các cộng sự [81], Vũ

Hoài Nam và các cộng sự [100] và Bùi Tiến Tú và các cộng sự [155] đã sử dụng HSDT và phương pháp năng lượng để phân tích ổn định tĩnh và động và dao động cơ nhiệt phi tuyến của tấm tròn và vỏ cầu thoải FG-GPLRC và sandwich FG-GPLRC với lõi rỗng và FG-GPLRC rỗng, có nền đàn hồi tuyến tính hoặc phi tuyến. Tiếp tục phát triển lên cho kết cấu vỏ chòm thoải có độ cong phức tạp, Vũ Hoài Nam và các cộng sự [100], Bùi Tiến Tú và các cộng sự [155] đã phân tích ổn định cơ nhiệt của vỏ chòm parabol, hình sin và hình elip bằng cách thực hiện các tính phân số cho các tích phân phát sinh do phương trình độ cong phức tạp mang lại. Ứng xử động lực cơ nhiệt điện phi tuyến của panel có độ cong phức tạp FG-GPLRC với lõi auxetic cũng được nghiên cứu bởi Vũ Hoài Nam và các cộng sự [102] theo HSDT.

Phân tích các kết cấu tấm vỏ FG-GPLRC không phức tạp như tấm vỏ FG-CNTRC về mặt toán học nên nghiên cứu về các kết cấu này thu hút được nhiều nhà khoa học trong nước cũng như ngoài nước tham gia nghiên cứu, tuy vậy do đây là vật liệu mới nên các công bố chưa nhiều.

1.2.4. Các nghiên cứu về tấm vỏ FG-GRC và FG-GRMMC

Ứng xử cơ học của tấm, vỏ FG-GRC phân lớp đã và đang được nhiều nhóm tác giả quan tâm trên thế giới. Trong đó hai nhóm nổi bật là Shen và các cộng sự [132-135, 137, 138], Kiani và các cộng sự [68-71] đã công bố một số nghiên cứu về ứng xử tĩnh và động của kết cấu tấm, vỏ FG-GRC phân lớp. Các kết cấu tấm và vỏ làm bằng FG-GRMMC phân lớp cũng được nghiên cứu chi tiết, trong đó tập trung khảo sát các hiệu ứng của hệ số Poisson âm tới ứng xử ổn định và dao động [27, 49, 139-141].

Nhóm tác giả đến từ trường Đại học Công nghệ GTVT cũng đóng góp nhiều nghiên cứu về bài toán phi tuyến ổn định của tấm và vỏ FG-GRC phân lớp [1, 29, 30, 87, 95-98, 109, 110, 113, 115-117]. Có thể thấy rằng cả FG-GRC/FG-GRMMC và FG-GPLRC đều được đề xuất dựa trên ý tưởng tương tự với FGM, vì vậy việc tăng cứng cho kết cấu làm bằng các vật liệu này cũng cần đảm bảo điều kiện liên tục về vật liệu giữa vỏ và gân. Một cách định tính, nếu tăng cứng kết cấu bằng chính vật liệu nền (polymer/kim loại) thì để đạt được một hiệu quả nhất định cần một lượng gân rất lớn, do mô đun đàn hồi của vật liệu nền là rất nhỏ so với FG-GRC/FG-GRMMC và FG-GPLRC tương ứng. Vì vậy, nhóm tác giả này [29, 30, 96-98, 109, 110, 113, 117]

đã đưa ra biện pháp tăng cứng cho vỏ trụ FG-GRC bằng hệ thống gân cũng được chế tạo từ FG-GRC với quy luật phân bố của Graphene một cách phù hợp với quy luật phân bố của graphene trong vỏ với mục tiêu là đảm bảo điều kiện liên tục về vật liệu giữa vỏ và gân. Ngoài ra, có thể nhận thấy rằng kỹ thuật san tác dụng gân áp dụng cho các loại vật liệu đẳng hướng và vật liệu FGM, không thể áp dụng được cho FG-GRC. Vì vậy trong các nghiên cứu này [101-109] cũng đã cải tiến kỹ thuật san tác dụng gân cho gân FG-GRC trực giao trong đó sử dụng HSDT và lý thuyết vỏ cổ điển. Gần đây, Vũ Hoài Nam và các cộng sự [99] đã phân tích ổn định phi tuyến panel trụ, parabol và hình sin không hoàn hảo.

1.3. Tiềm năng ứng dụng Nanocomposite và kết cấu tấm vỏ Nanocomposite trong kỹ thuật xây dựng công trình

1.3.1. Tiềm năng ứng dụng Nanocomposite

Việc áp dụng và phát triển các loại vật liệu tiên tiến vào ngành kỹ thuật xây dựng đã và đang là một xu hướng quan trọng với mục tiêu cải thiện chất lượng, độ bền và hiệu quả cho các công trình. Các vật liệu composite như FG-CNTRC, FG-GRC và FG-GPLRC đang được quan tâm đặc biệt do những đặc tính ưu việt về cơ học, điện học và nhiệt học, điều đó cũng mở ra các cơ hội trong việc áp dụng những loại vật liệu này vào ngành kỹ thuật xây dựng công trình, chẳng hạn như sau:

FG-CNTRC, FG-GRC và FG-GPLRC có khả năng tăng độ cứng và độ bền kéo của các cấu trúc xây dựng nhờ vào các vật liệu gia cường nano. Sự phân bố cơ tính biến thiên của chúng giúp tối ưu hóa các tính chất cơ học, từ đó tăng khả năng chịu tải và tính bền vững của các công trình xây dựng như nhà cao tầng và các kết cấu chịu lực. Việc đưa CNT vào các kết cấu xây dựng giúp giảm trọng lượng tổng thể của công trình nhờ vậy mà chi phí lắp đặt và vận chuyển giảm xuống đáng kể, góp phần sử dụng năng lượng tiết kiệm và hiệu quả hơn.

CNT và Graphene có khả năng chịu nhiệt cao, giúp cải thiện tính chịu lửa của các vật liệu xây dựng. Điều này đặc biệt quan trọng đối với các công trình yêu cầu tiêu chuẩn an toàn cháy nổ cao như nhà cao tầng và công trình công cộng. Nanocomposite với đặc tính chống ăn mòn và mài mòn tốt, từ đó giúp tăng tuổi thọ của kết cấu và hạ thấp chi phí bảo trì. Ngoài ra, một số nghiên cứu cho thấy vật liệu

nanocomposite có khả năng tự làm lành khi có vết nứt nhỏ, nhờ vậy mà tuổi thọ của công trình tăng, chi phí sửa chữa và bảo trì giảm.

Khác với các loại composite truyền thống, nhìn chung các loại nanocomposite thường có mô đun đàn hồi (độ cứng) rất cao. Tùy thuộc vào vật liệu nền, tỷ phần thể tích và quy luật phân bố của vật liệu nano gia cường, mô đun đàn hồi (độ cứng) của chúng có thể tương đương hoặc lớn hơn thép. Điều này cũng khắc phục nhược điểm lớn của composite truyền thống cho phép ứng dụng nanocomposite vào hầu hết các cấu kiện công trình.

Như vậy, nhờ có những đặc tính ưu việt, các vật liệu FG-CNTRC, FG-GRC và FG-GPLRC đang mở ra nhiều tiềm năng trong kỹ thuật xây dựng công trình. Các vật liệu này không chỉ làm tăng khả năng chịu tải và kéo dài tuổi thọ mà còn giảm trọng lượng, cải thiện tính năng chịu lửa cũng như khả năng tự làm lành của công trình. Nhờ đó mà trong tương lai, ngành xây dựng sẽ có được nhiều lợi ích kinh tế và thân thiện với môi trường hơn. FG-CNTRC, FG-GRC và FG-GPLRC vẫn liên tục được nghiên cứu và phát triển để có thể khai thác nhiều nhất có thể tiềm năng của các vật liệu này cũng như tối ưu hóa việc sử dụng chúng trong các công trình xây dựng, nhất là các công trình đặc biệt. Công nghệ và khoa học vật liệu đang ngày càng phát triển mạnh mẽ, do vậy xu hướng tất yếu trong tương lai sẽ là ứng dụng các vật liệu này vào lĩnh vực xây dựng, từ đó giúp cho các công trình ngày càng an toàn và bền vững hơn, vật liệu được sử dụng tiết kiệm và hiệu quả hơn.

1.3.2. Tiềm năng ứng dụng của tấm và vỏ Nanocomposite

Với những đặc trưng cơ nhiệt ưu việt, các kết cấu tấm vỏ composite nói chung và nanocomposite nói riêng đều có thể được dùng trong rất nhiều các chi tiết của kết cấu công trình khác nhau [6, 62, 85, 118] (Hình 1.2).

a) Ứng dụng trong các cấu kiện công trình

So với vật liệu truyền thống, tấm sàn và tấm trần làm bằng vật liệu nanocomposite bền hơn và chịu được tải lớn hơn. Chi phí lắp đặt, vận chuyển cũng được giảm đáng kể nhờ tính năng nhẹ và bền, các tấm này giúp giảm trọng lượng tổng thể của công trình. Tuổi thọ của các tấm sàn và trần cũng được tăng lên do đặc tính chống ăn mòn và mài mòn của nanocomposite.

Vỏ mái công trình làm bằng vật liệu nanocomposite có thể chống chịu tải trọng động cao cũng như thời tiết khắc nghiệt. Với độ bền và độ cứng cao, các vỏ này giúp tăng độ bền và khả năng chống chịu trước các tác động bên ngoài của công trình. Khả năng chống ăn mòn của vật liệu nanocomposite cũng làm giảm chi phí sửa chữa và bảo trì trong thời gian dài.

b) Ứng dụng trong các công trình cụ thể

Với nhà cao tầng, việc sử dụng tấm và vỏ nanocomposite giúp giảm trọng lượng tổng thể và tăng cường độ bền của công trình.



Hình 1.2. Khả năng ứng dụng tấm vỏ composite tiên tiến vào kết cấu công trình [31, 74, 103, 163]

Trong các công trình giao thông, các vỏ nanocomposite làm tăng khả năng chịu tải và độ bền của công trình. Trọng lượng nhẹ của nanocomposite cũng làm giảm chi phí vận chuyển và lắp đặt, giúp tiết kiệm chi phí xây dựng. Các tấm và vỏ nanocomposite có thể được sử dụng trong xây dựng các công trình công nghiệp và hạ tầng như nhà kho, nhà máy và các cơ sở hạ tầng khác. Trong công trình biển, kết cấu dạng tấm / vỏ nanocomposite có thể dùng trong các dầm chịu lực và kết cấu chính của giàn khoan dầu và khí. Các ống dẫn và hệ thống vận chuyển dầu khí làm bằng

nanocomposite có thể chống ăn mòn và chịu áp lực cao làm giảm thiểu rủi ro rò rỉ và hỏng hóc. Các kết cấu dạng tấm / vỏ nanocomposite có thể được sử dụng để xây dựng các bến cảng và cầu tàu. Các công trình ven biển sử dụng tấm chắn sóng và kè biển làm bằng nanocomposite có thể chịu được sức ép từ sóng biển và gió bão, giúp giảm sự ảnh hưởng của xâm thực và hư hại nhờ đó làm tăng tuổi thọ cho các công trình và giảm chi phí bảo trì.

Hiện tại, các loại nanocomposite nói chung cũng có những nhược điểm lớn, trong đó dễ thấy rằng với công nghệ chế tạo phức tạp dẫn tới chi phí sản xuất cao làm cho việc ứng dụng chúng một cách đại trà trong kết cấu công trình xây dựng trở nên khó khăn. Tuy vậy nanocomposite vẫn là lựa chọn tốt cho một số cấu kiện công trình nhất định như trong trường hợp đòi hỏi độ bền cũng như khả năng chịu tải đặc biệt lớn. Sau này, khi giảm được chi phí sản xuất, nanocomposite có tiềm năng trở thành ứng viên hoàn hảo để thay cho vật liệu truyền thống trong hầu hết các cấu kiện công trình, từ đó thúc đẩy việc sử dụng hiệu quả các nguồn tài nguyên và thân thiện với môi trường.

1.4. Những kết quả nghiên cứu đã thực hiện trong và ngoài nước

Dựa trên các kết quả thu được về tấm và vỏ Nanocomposite trong thời gian qua, có thể thấy kết quả mà các nhà nghiên cứu ở Việt nam và trên thế giới đã thực hiện bao gồm:

1- Các bài toán **ổn định tuyến tính và phi tuyến tĩnh** các kết cấu tấm, vỏ FG-CNTRC, FG-GRC và FG-GPLRC chịu tải trọng cơ-nhiệt hoặc cơ, nhiệt, có hoặc không có nền đàn hồi đã được nghiên cứu và thảo luận tương đối toàn diện dựa trên các lý thuyết tấm vỏ khác nhau, theo các phương pháp giải khác nhau, .

2- Các bài toán **dao động tuyến tính và phi tuyến và ổn định động** của kết cấu FG-CNTRC, FG-GRC và FG-GPLRC chịu các điều kiện tải trọng khác nhau, theo các phương pháp khác nhau, có và không có nền đàn hồi, cũng đã được phân tích tương đối chi tiết.

3- Dù đã có nhiều bài toán phân tích các kết cấu FGM có gân tăng cứng trong các trường hợp khác nhau, tuy vậy tấm vỏ FG-CNTRC, FG-GRC và FG-GPLRC có gân tăng cứng vẫn chưa được quan tâm nhiều. Đặc biệt là các loại gân như gân mạng nhện (với tấm tròn và vỏ cầu), gân xoắn ốc với vỏ trụ vẫn còn chưa được tập trung

phân tích. Các panel với độ cong phức tạp như panel hình sin hay parabol nanocomposite có gân tăng cứng cũng chưa được nghiên cứu.

1.5. Kết luận chương 1 và những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Chương 1 của luận án đã trình bày tổng quan và phân tích về các loại vật liệu nanocomposite, tiềm năng ứng dụng của chúng trong kết cấu công trình, các kết quả thu được từ các nhà khoa học trên thế giới và Việt Nam. Từ tổng quan những vấn đề đã thảo luận ở trên, có thể thấy một số bài toán cần tiếp tục nghiên cứu, như sau:

1- Thiết lập các kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến cho gân FG-GPLRC với các thiết kế dạng mạng nhện (đối với tấm tròn và vỏ cầu thoải FG-GPLRC) và gân xoắn ốc với vỏ trụ FG-GPLRC.

2- Nghiên cứu về ổn định và động lực phi tuyến của kết cấu tấm tròn và vỏ cầu thoải FG-GPLRC có gân tăng cứng FG-GPLRC dạng mạng nhện chịu tải cơ và nhiệt. Trong đó áp dụng lý thuyết vỏ Donnell [8] và phương pháp năng lượng giải cũng như khảo sát các ảnh hưởng của gân mạng nhện, các thông số hình học vật liệu tới ứng xử ổn định và động lực của kết cấu. Phương pháp Runge-Kutta bậc bốn [4] được áp dụng để nhận được đáp ứng động lực phi tuyến của vỏ. Cuối cùng, các tiêu chuẩn ổn định tĩnh phi tuyến [1, 6] và tiêu chuẩn ổn định động phi tuyến Budiansky-Roth [2, 4] được áp dụng để nhận được tải tới hạn động phi tuyến.

3- Nghiên cứu về ổn định và động lực phi tuyến của panel trụ, parabol và hình sin FG-CNTRC và FG-GRC có gân tăng cứng FG-CNTRC và FG-GRC tương ứng chịu các dạng tải trọng khác nhau trong môi trường nhiệt. Trong đó, HSĐT và phương pháp năng lượng được sử dụng để nhận được phương trình chuyển động và được giải bằng phương pháp Runge-Kutta bậc bốn để nhận được đáp ứng động lực phi tuyến của vỏ.

4- Nghiên cứu về ổn định và sau mất ổn định phi tuyến tĩnh của kết cấu vỏ trụ FG-GPLRC, FG-GPLRC rỗng có gân tăng cứng trục giao và xoắn ốc. Kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến cho gân xoắn ốc FG-GPLRC, lý thuyết vỏ Donnell và phương pháp năng lượng Ritz được sử dụng để phân tích ứng xử ổn định phi tuyến của kết cấu.

CHƯƠNG 2. ỔN ĐỊNH VÀ ĐỘNG LỰC PHI TUYẾN CỦA TẮM TRÒN VÀ CHỖM CẦU THOẢI FG-GPLRC TĂNG CỨNG BỞI HỆ GÂN MẠNG NHỆN

Trong xây dựng công trình, nhờ tính độc đáo về kiến trúc và thẩm mỹ mà các kết cấu vòm thoải được sử dụng phổ biến. Chòm cầu thoải là loại kết cấu thông dụng nhất nhờ quy trình tính toán, thiết kế và chế tạo tương đối đơn giản; khi cho bán kính chòm tăng đến vô cùng, có thể nhận được kết cấu tấm tròn. Tấm tròn và chòm cầu thoải thường được dùng để làm cầu kiện của các kết cấu công trình, đồng thời đã có nhiều nghiên cứu về ứng xử tĩnh và động của chúng khi sử dụng các loại vật liệu khác nhau.

Tăng cứng tấm và vỏ bằng gân tăng cứng là một phương pháp phổ biến trong kỹ thuật. Tuy nhiên, đa số các công trình trước đây chỉ chú trọng nghiên cứu các kết cấu được tăng cứng bằng gân đồng nhất và đẳng hướng. Việc phân tích cơ học các kết cấu được tăng cứng bằng gân dị hướng gặp nhiều khó khăn, đặc biệt khi kết cấu gân phức tạp. Cụ thể, tấm tròn và chòm cầu thoải được gia cố bằng hệ gân mạng nhện, bao gồm các gân kinh tuyến (hướng tâm) và gân vĩ tuyến (gân vòng). Do khoảng cách giữa các gân kinh tuyến không cố định, việc tính toán giải tích trở nên phức tạp. Đây là thách thức lớn trong việc phân tích ứng xử cơ học của loại kết cấu này.

Chương này của luận án sẽ đề xuất một thuật toán giải tích để phân tích ứng xử sau mất ổn định của tấm tròn và chòm cầu thoải có gân mạng nhện. Thuật toán này mở rộng kỹ thuật san đều tác dụng gân của Lekhnitskii và sử dụng phương pháp năng lượng. Chương này sẽ tập trung nghiên cứu một số điểm chính như thiết kế quy luật phân bố GPL trong gân và tấm tròn/chòm cầu, thiết kế không gian của gân mạng nhện, khảo sát ảnh hưởng của gân, tính chất vật liệu, nền đàn hồi phi tuyến và các thông số hình học đến ứng xử ổn định và động lực phi tuyến của kết cấu chòm cầu thoải, tấm tròn có gân tăng cứng mạng nhện.

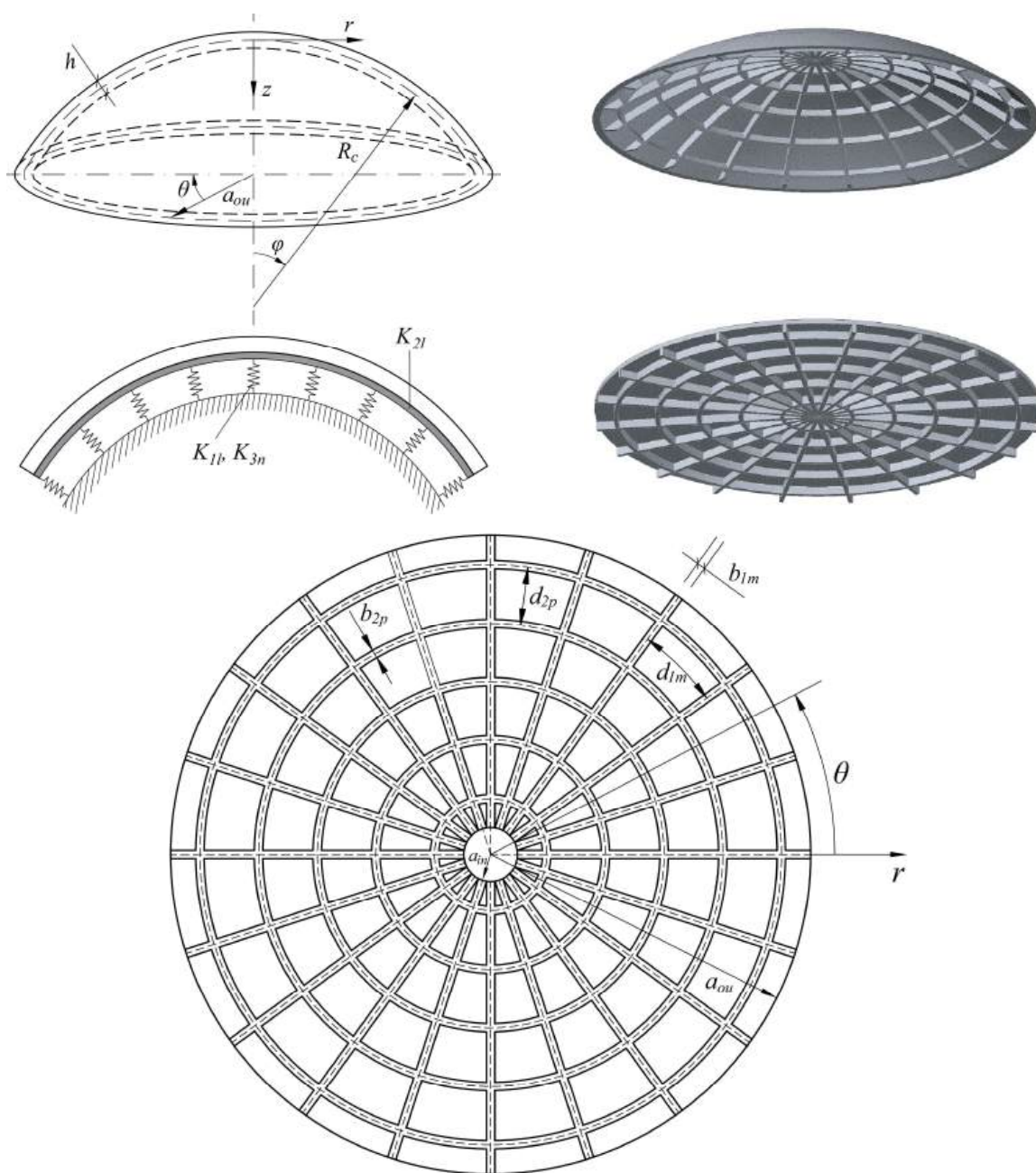
Các kết quả thu được sẽ góp phần làm sáng tỏ các vấn đề khoa học cũng như có giá trị thực tiễn đối với lĩnh vực thiết kế các kết cấu hiện đại, đặc biệt khi sử dụng vật liệu tiên tiến như FG-GPLRC.

Nội dung chính của chương này đã được công bố trên 03 bài báo trên tạp chí quốc tế ISI (SCIE) (Bài báo số 1, số 8 và số 9, trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả liên quan đến luận án).

2.1. Mô hình kết cấu và vật liệu

2.1.1. Mô hình kết cấu

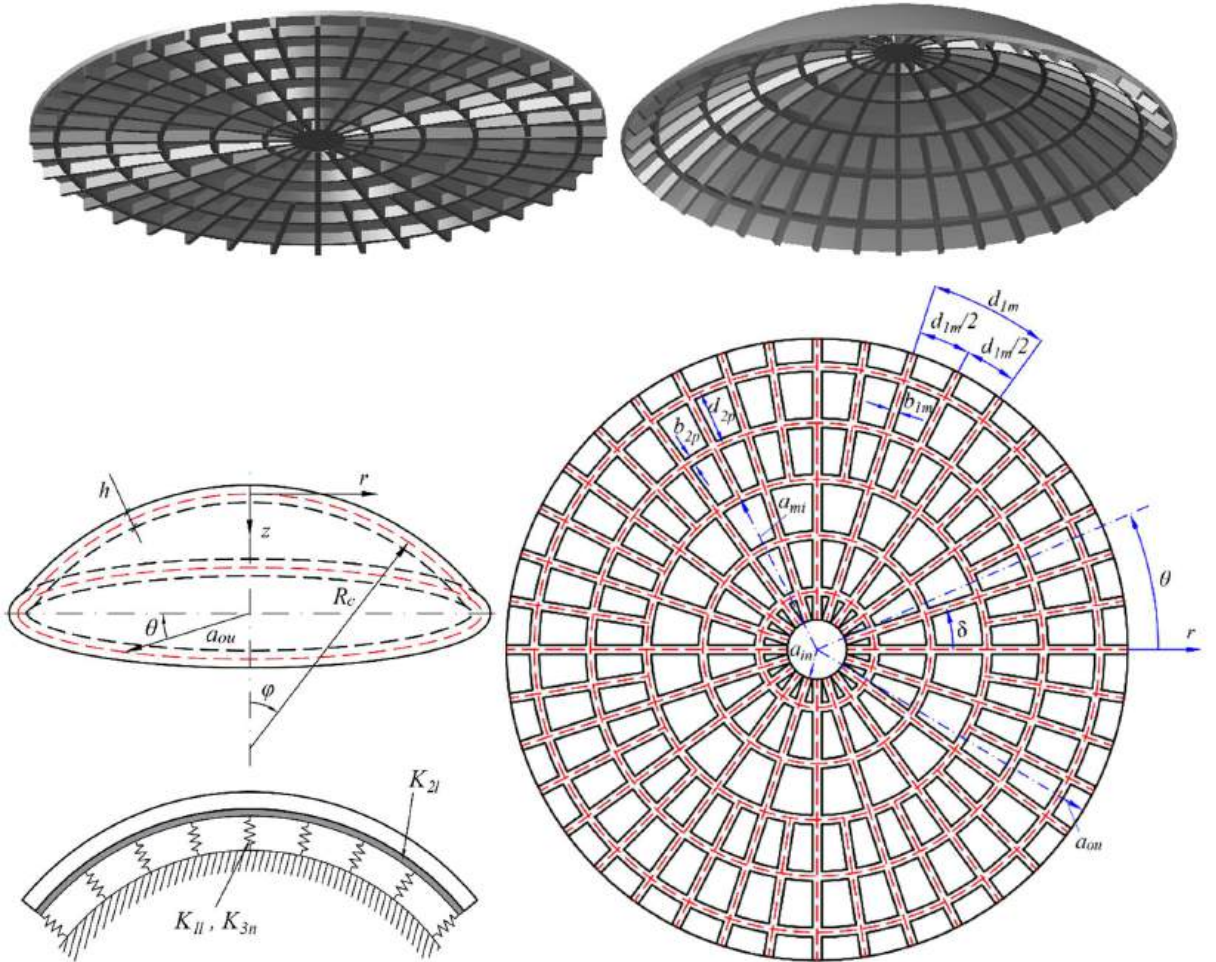
Chòm cầu thoải có độ dày h , bán kính R_c và bán kính đáy a_{ou} đặt trên nền đàn hồi phi tuyến được mô tả như trong Hình 2.1. Chòm cầu được tăng cứng bởi các gân phân bố đều theo hướng vĩ tuyến (hướng vòng) hoặc các gân phân bố đều hướng kinh tuyến (hướng tâm), hoặc gân mạng nhện (là sự kết hợp của các gân kinh tuyến và các gân vĩ tuyến).



Hình 2.1. Hệ trục tọa độ và mô hình chòm cầu thoải và tấm tròn được tăng cứng bởi gân mạng nhện hai vùng

Để giảm thiểu sự khác biệt về độ cứng của chòm cầu quá lớn giữa các vùng khác nhau, các gân kinh tuyến bổ sung được thêm vào các vùng gần biên. Ngoài ra, các gân kinh tuyến được hợp nhất với nhau gần đỉnh của chòm cầu. Ba vùng khác nhau được hình thành bao gồm vùng hợp nhất và hai vùng gân là vùng giữa và gần biên (Hình 2.2)

Chòm cầu thoải được coi là chịu biến dạng đối xứng trục và được xem xét trong hệ tọa độ (φ, θ, z) có gốc tọa độ ở bề mặt giữa của vỏ và φ, θ và z lần lượt được đặt theo các phương kinh tuyến, vĩ tuyến và theo phương bề dày của vỏ. Đối với trường hợp kết cấu chòm cầu thoải, để thuận tiện tính toán, biến $r = R_c \sin \varphi$ được đưa vào. Từ đó, các xấp xỉ $\cos \varphi \approx 1$ và $R_c d\varphi \approx dr$ được sử dụng.



Hình 2.2. Hệ trục tọa độ và mô hình chòm cầu thoải và tấm tròn được tăng cứng bởi gân mạng nhện ba vùng

Vì tấm tròn là một kết cấu đặc biệt của chòm cầu thoải nên các liên hệ và các phương trình cơ bản dưới đây sẽ được thiết lập chung cho chòm cầu thoải. Các công thức và phương trình cơ bản của tấm tròn nhận được bằng cách cho $R_c \rightarrow \infty$.

2.1.2. Mô hình vật liệu

2.1.2.1. Chỗm cầu và tấm tròn FG-GPLRC tăng cứng bởi hệ gân mạng nhện FG-GPLRC và có lớp áp điện

Các loại phân bố GPL đều hoặc biến đổi tuyến tính (Hình 2.3) theo bề dày của chỗm $(-h/2 + h_v \leq z \leq h/2)$ có thể được sử dụng cho các tỷ phần thể tích GPL, như sau:

$$\Lambda_G^{sh} = \begin{cases} \Lambda_G & \text{UD-GPLRC,} \\ \left[\frac{|4z - 2h_v|}{(-h_v + h)} \right] \Lambda_G & \text{X-GPLRC,} \\ \left[2 - \frac{|4z - 2h_v|}{(-h_v + h)} \right] \Lambda_G & \text{O-GPLRC,} \\ \left[\frac{(-2z + h)}{(h - h_v)} \right] \Lambda_G & \text{V-GPLRC,} \\ \left[\frac{(-2h_v + h + 2z)}{(h - h_v)} \right] \Lambda_G & \text{A-GPLRC,} \end{cases} \quad (2.1)$$

và đối với gân $(h/2 \leq z \leq h/2 + h_{st})$:

$$\Lambda_G^{st} = \begin{cases} \Lambda_G & \text{UD-GPLRC,} \\ \left[\frac{(-4z + 2h)}{h_{st} + 2} \right] \Lambda_G & \text{X-GPLRC,} \\ \left[2 - \frac{(-2h + 4z)}{h_{st} - 2} \right] \Lambda_G & \text{O-GPLRC,} \\ \left[\frac{(-2z + h)}{h_{st} + 2} \right] \Lambda_G & \text{V-GPLRC,} \\ \left[\frac{(-h + 2z)}{h_{st}} \right] \Lambda_G & \text{A-GPLRC,} \end{cases} \quad (2.2)$$

trong đó tỷ phần khối lượng trung bình của GPL cho chỗm cầu hoặc gân được xác định bởi Λ_G .

Xấp xỉ Halpin-Tsai được sử dụng cho các ước tính mô đun đàn hồi hiệu dụng của chỗm cầu được viết trong phương trình (1.8) và tương tự với gân như sau [26, 51]:

$$\bar{E}_{st} = \frac{1}{8} \left[\frac{3(1 + \bar{m}_1 \bar{n}_1 \bar{V}_G^{st}) E_m}{1 - \bar{n}_1 \bar{V}_G^{st}} + \frac{5(1 + \bar{m}_2 \bar{n}_2 \bar{V}_G^{st}) E_m}{1 - \bar{n}_2 \bar{V}_G^{st}} \right], \quad (2.3)$$

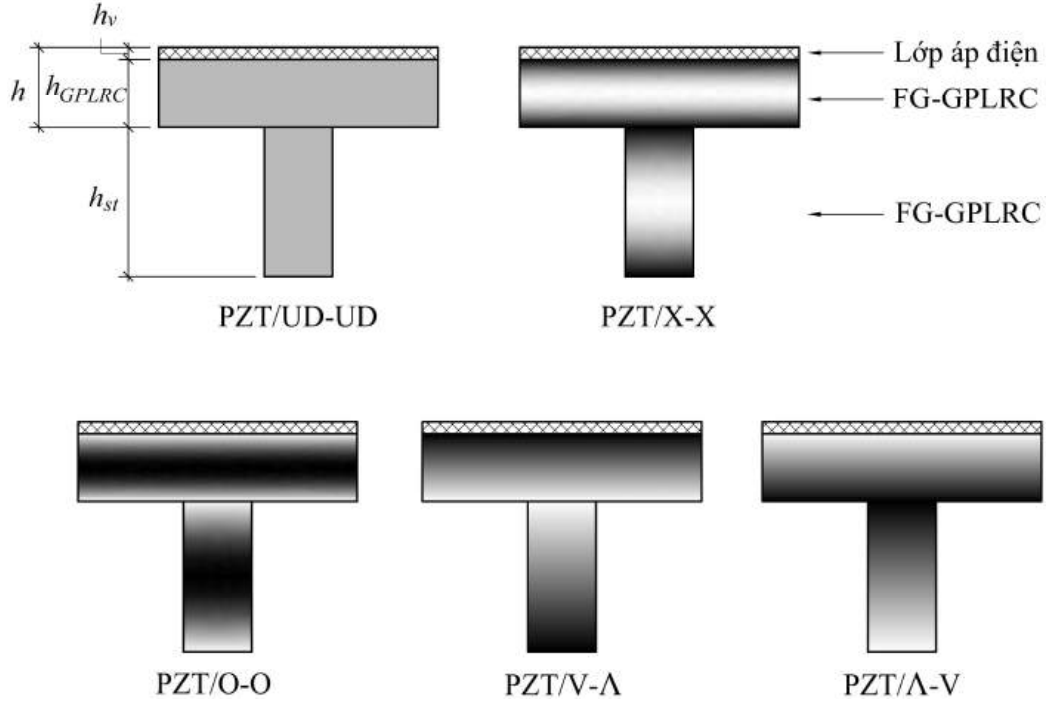
Tỷ phần thể tích của GPL trong chỗm cầu được viết trong phương trình (1.10) và tương tự với gân như sau [26, 51]:

$$\bar{V}_G^{st} = \frac{\rho_m \Lambda_G^{st}}{\rho_m \Lambda_G^{st} + \rho_G - \rho_G \Lambda_G^{st}}, \quad (2.4)$$

Theo quy tắc hỗn hợp, hệ số Poisson, mật độ và hệ số giãn nở nhiệt của chỗm cầu được xác định trong phương trình (1.12) và gân tăng cứng được biểu diễn bởi [26, 51]:

$$\bar{v}_{st} = v_G \bar{V}_G^{st} + v_m (1 - \bar{V}_G^{st}), \bar{\rho}_{st} = \rho_G \bar{V}_G^{st} + \rho_m (1 - \bar{V}_G^{st}), \bar{\alpha}_{st} = \alpha_G \bar{V}_G^{st} + \alpha_m (1 - \bar{V}_G^{st}). \quad (2.5)$$

Trong luận án này, các lớp áp điện làm từ PZT-5A, với $d_v = 2.54 \times 10^{-10} \text{ m/V}$, $\bar{E}_v = 63 \text{ GPa}$, $\bar{v}_v = 0.3$, $\bar{\rho}_v = 7600 \text{ kg/m}^3$, $\bar{\alpha}_v = 0.9 \times 10^{-6} / \text{K}$ [123].



Hình 2.3. Các loại phân bố GPL của chòm cầu và gân

Các độ cứng rút gọn được tính toán cho của chòm cầu:

$$Q_{11}^{sh} = Q_{22}^{sh} = \frac{\bar{E}_{sh}}{1 - \bar{v}_{sh}^2}, \quad Q_{12}^{sh} = \frac{\bar{E}_{sh} \bar{v}_{sh}}{1 - \bar{v}_{sh}^2}, \quad (2.6)$$

và cho lớp áp điện:

$$Q_{11}^v = Q_{22}^v = \frac{\bar{E}_v}{1 - \bar{v}_v^2}, \quad Q_{12}^v = \frac{\bar{E}_v \bar{v}_v}{1 - \bar{v}_v^2}. \quad (2.7)$$

2.1.2.2. Chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện FG-GPLRC

Với mô hình này, vật liệu composite gia cường GPL được chọn làm vật liệu cho lớp vỏ và gân tăng cứng. Lớp mặt FG-GPLRC, lõi rỗng và gân FG-GPLRC được thiết kế thành năm mô hình U/PC/U-U, X/PC/X-X, A/PC/V-A, V/PC/A-V và O/PC/O-O, như trình bày trong Hình 2.4.

Năm quy luật phân bố khối lượng GPL của lớp mặt và gân tăng cứng mạng nhện được thiết kế như sau:

+) Lớp mặt trên $(-h/2 \leq z \leq -h_{cc}/2)$:

$$\Lambda_G^T = \begin{cases} \Lambda_G & \text{UD-GPLRC,} \\ \left[\left| (2h_{cc} + 2h + 8z) / (-h_{cc} + h) \right| \right] \Lambda_G & \text{X-GPLRC,} \\ \left[2 - \left| (2h_{cc} + 2h + 8z) / (-h_{cc} + h) \right| \right] \Lambda_G & \text{O-GPLRC,} \\ \left[(2h_{cc} + 4z) / (h_{cc} - h) \right] \Lambda_G & \text{V-GPLRC,} \\ \left[-(2h + 4z) / (h_{cc} - h) \right] \Lambda_G & \text{A-GPLRC,} \end{cases} \quad (2.8)$$

+) Lớp mặt dưới ($h_{cc}/2 \leq z \leq h/2$):

$$\Lambda_G^B = \begin{cases} \Lambda_G & \text{UD-GPLRC,} \\ \left[\left| (2h - 8z + 2h_{cc}) / (h_{cc} - h) \right| \right] \Lambda_G & \text{X-GPLRC,} \\ \left[2 - \left| (2h - 8z + 2h_{cc}) / (h_{cc} - h) \right| \right] \Lambda_G & \text{O-GPLRC,} \\ \left[(4z - 2h) / (h_{cc} - h) \right] \Lambda_G & \text{V-GPLRC,} \\ \left[(2h_{cc} - 4z) / (h_{cc} - h) \right] \Lambda_G & \text{A-GPLRC,} \end{cases} \quad (2.9)$$

và cho gân tăng cứng ($h/2 \leq z \leq h/2 + h_{st}$):

$$\Lambda_G^{st} = \begin{cases} \Lambda_G & \text{UD-GPLRC,} \\ \left[\left| (2h - 4z) / h_{st} + 2 \right| \right] \Lambda_G & \text{X-GPLRC,} \\ \left[2 - \left| (4z - 2h) / h_{st} - 2 \right| \right] \Lambda_G & \text{O-GPLRC,} \\ \left[(h - 2z) / h_{st} + 2 \right] \Lambda_G & \text{V-GPLRC,} \\ \left[(2z - h) / h_{st} \right] \Lambda_G & \text{A-GPLRC,} \end{cases} \quad (2.10)$$

Tỷ phần thể tích GPL của gân được xác định trong phương trình (2.4) và của các lớp mặt trên và dưới của chỏm cầu được tính bằng [26, 51]:

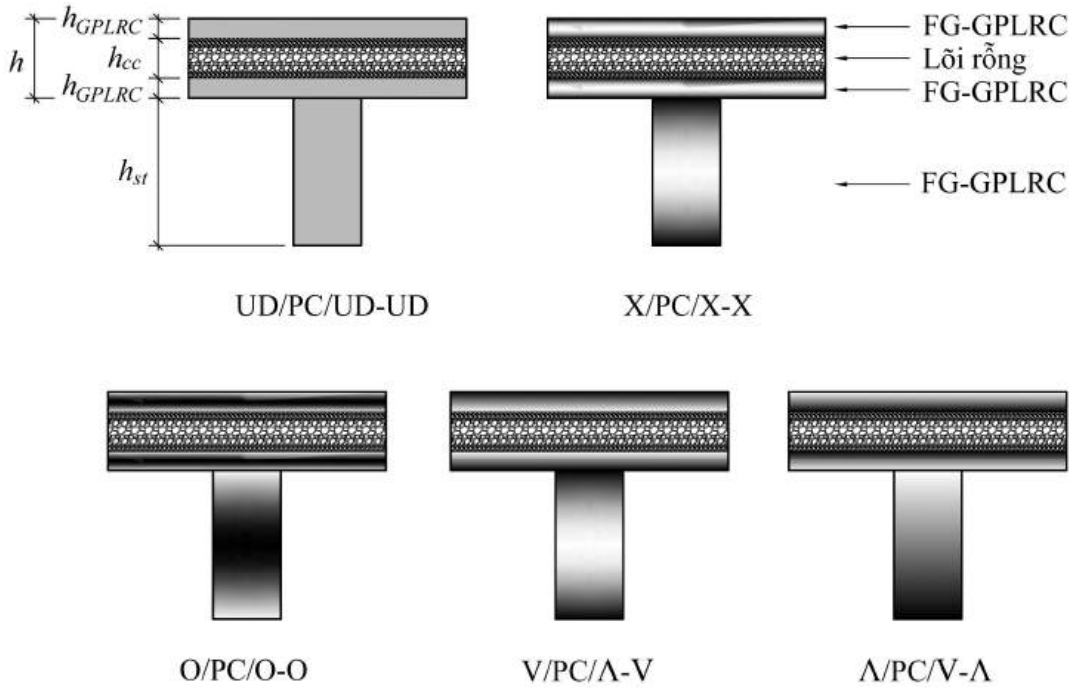
$$\bar{V}_G^T = \frac{\rho_m \Lambda_G^T}{\rho_G (1 - \Lambda_G^T) + \rho_m \Lambda_G^T}, \quad (2.11)$$

$$\bar{V}_G^B = \frac{\rho_m \Lambda_G^B}{\rho_G (1 - \Lambda_G^B) + \rho_m \Lambda_G^B}, \quad (2.12)$$

Mô đun Young của gân được xác định trong phương trình (2.3) và các lớp mặt được xác định tương tự theo mô hình Halpin-Tsai cải tiến như sau [26, 51]:

$$\bar{E}_T = \frac{1}{8} \left[\frac{3(1 + \bar{m}_1 \bar{n}_1 \bar{V}_G^T) E_m}{1 - \bar{n}_1 \bar{V}_G^T} + \frac{5(1 + \bar{m}_2 \bar{n}_2 \bar{V}_G^T) E_m}{1 - \bar{n}_2 \bar{V}_G^T} \right], \quad (2.13)$$

$$\bar{E}_B = \frac{1}{8} \left[\frac{3(1 + \bar{m}_1 \bar{n}_1 \bar{V}_G^B) E_m}{1 - \bar{n}_1 \bar{V}_G^B} + \frac{5(1 + \bar{m}_2 \bar{n}_2 \bar{V}_G^B) E_m}{1 - \bar{n}_2 \bar{V}_G^B} \right], \quad (2.14)$$



Hình 2.4. Thiết kế quy luật phân bố của các lớp mặt và gân tăng cứng

Hệ số Poisson ν , hệ số giãn nở nhiệt α và mật độ ρ của gân tăng cứng được ước lượng trong phương trình (2.5) và của hai lớp mặt GPLRC có thể ước lượng như sau [26, 51]:

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_T &= \bar{V}_G^T \nu_G + (1 - \bar{V}_G^T) \nu_m, & \bar{\nu}_B &= \bar{V}_G^B \nu_G + (1 - \bar{V}_G^B) \nu_m, \\ \bar{\alpha}_T &= \bar{V}_G^T \alpha_G + (1 - \bar{V}_G^T) \alpha_m, & \bar{\alpha}_B &= \bar{V}_G^B \alpha_G + (1 - \bar{V}_G^B) \alpha_m, \\ \bar{\rho}_T &= \bar{V}_G^T \rho_G + (1 - \bar{V}_G^T) \rho_m, & \bar{\rho}_B &= \bar{V}_G^B \rho_G + (1 - \bar{V}_G^B) \rho_m. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Với mô hình vật liệu này, vật liệu của lõi rỗng được chọn giống nền đẳng hướng của FG-GPLRC. Mô đun Young hiệu dụng, hệ số giãn nở nhiệt, hệ số Poisson và mật độ được ước tính bằng $\left(-\frac{h_{cc}}{2} < z < \frac{h_{cc}}{2}\right)$:

$$\begin{cases} \bar{E}_C = \{1 - [\cos(\pi z/h_{cc})] e_c\} E_m \\ \bar{\rho}_C = [1 - (1 - \sqrt{1 - e_c}) \cos(\pi z/h_{cc})] \rho_m, \\ \bar{\nu}_C = \nu_m, \bar{\alpha}_C = \alpha_m \end{cases} \quad (2.16)$$

trong đó e_c là hệ số rỗng ($0 \leq e_c \leq 1$).

Các thành phần độ cứng rút gọn cho các lớp vỏ như sau:

$$\begin{aligned} Q_{11}^T &= \frac{\bar{E}_T}{1-\bar{\nu}_T^2} = Q_{22}^T, \quad Q_{11}^B = \frac{\bar{E}_B}{1-\bar{\nu}_B^2} = Q_{22}^B, \quad Q_{11}^C = \frac{\bar{E}_C}{1-\bar{\nu}_C^2} = Q_{22}^C, \\ Q_{12}^T &= \frac{\bar{\nu}_T \bar{E}_T}{1-\bar{\nu}_T^2}, \quad Q_{12}^B = \frac{\bar{\nu}_B \bar{E}_B}{1-\bar{\nu}_B^2}, \quad Q_{12}^C = \frac{\bar{\nu}_C \bar{E}_C}{1-\bar{\nu}_C^2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.2. Các phương trình cơ bản và phương pháp giải

2.2.1. Các công thức và phương trình cơ bản

Do với chỏm cầu thoải và tâm tròn thì mode đối xứng trục chiếm ưu thế nên luận án này chỉ xem xét mode đối xứng trục của biến dạng. Chuyển vị theo phương vĩ tuyến được giả thiết bằng không $\hat{v}(r,z)=0$. Các chuyển vị theo phương bề dày của chỏm cầu được định nghĩa bởi [8]:

$$\hat{w}(r,z) = w^*(r) + w(r), \quad \hat{u}(r,z) = u(r), \quad (2.18)$$

trong đó $w^*(r)$ và $u(r)$ lần lượt là độ không hoàn hảo và chuyển vị theo phương kinh tuyến.

Biến dạng có tọa độ theo phương bề dày z được biểu diễn bởi [13]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_r - zw_{,rr} \\ \bar{\varepsilon}_\theta - \frac{1}{r}zw_{,r} \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

trong đó các mối liên hệ phi tuyến về biến dạng và chuyển vị tại mặt giữa của chỏm cầu được viết như sau [13]:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_r \\ \bar{\varepsilon}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{w}{R_c} + \frac{1}{2}w_{,r}^2 + w_{,r}w_{,r}^* + u_{,r} \\ \frac{u}{r} - \frac{w}{R_c} \end{Bmatrix}. \quad (2.20)$$

Định luật Hooke có xét đến các thành phần cơ nhiệt và điện được áp dụng cho chỏm cầu như sau:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= Q_{11}\varepsilon_r + Q_{12}\varepsilon_\theta - (Q_{11} + Q_{12})[\bar{\alpha}(z)\Delta T + V_e d_v/h_v], \\ \sigma_\theta &= Q_{12}\varepsilon_r + Q_{22}\varepsilon_\theta - (Q_{12} + Q_{22})[\bar{\alpha}(z)\Delta T + V_e d_v/h_v], \end{aligned} \quad (2.21)$$

trong đó ΔT là tải trọng nhiệt phân bố đều hoặc là môi trường nhiệt trong trường hợp tải trọng cơ học, V_e là điện áp của lớp áp điện.

Kỹ thuật san tác dụng gân cổ điển của Lekhnitskii [4] dựa trên lý thuyết dầm cổ điển cho vật liệu đồng nhất và đẳng hướng, thuần nhất độ cứng của gân thành độ cứng

của vỏ, đơn giản hóa vỏ có gân thành vỏ dị hướng không gân tương đương. Kỹ thuật này giả định khoảng cách không đổi giữa các gân, điều này hạn chế ứng dụng của nó đối với chỏm cầu có gân theo phương kinh tuyến. Trong luận án này, kỹ thuật san tác dụng gân được phát triển cho gân mạng nhện ba vùng với khoảng cách giữa các gân theo kinh tuyến là hàm của tọa độ khác nhau đối với ba vùng bao gồm vùng hợp nhất, hai vùng gân là vùng giữa và gần biên. Các biểu thức lực giãn và mô men được suy ra bằng cách tích phân phương trình (2.21) và kết hợp kỹ thuật san tác dụng cải tiến với chỏm cầu có gân mạng nhện nhận được như sau:

$$\begin{aligned}
N_r &= \bar{\epsilon}_r J_{11} - w_{,rr} F_{11} + \bar{\epsilon}_\theta J_{12} - \frac{w_{,r}}{r} F_{12} - V_e \phi_{1r}^v - \Delta T \phi_{1r}^T, \\
M_r &= \bar{\epsilon}_r F_{11} - w_{,rr} P_{11} + \bar{\epsilon}_\theta F_{12} - \frac{w_{,r}}{r} P_{12} - V_e \phi_{2r}^v - \Delta T \phi_{2r}^T, \\
N_\theta &= \bar{\epsilon}_r J_{12} - w_{,rr} F_{12} + \bar{\epsilon}_\theta J_{22} - \frac{w_{,r}}{r} F_{22} - V_e \phi_{1\theta}^v - \Delta T \phi_{1\theta}^T, \\
M_\theta &= \bar{\epsilon}_r F_{12} - w_{,rr} P_{12} + \bar{\epsilon}_\theta F_{22} - \frac{w_{,r}}{r} P_{22} - V_e \phi_{2\theta}^v - \Delta T \phi_{2\theta}^T,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

trong đó đối với vùng hợp nhất $r \in [0, a_{in}]$:

$$\begin{aligned}
(P_{11}^{in}, F_{11}^{in}, J_{11}^{in}) &= \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (z^2, z, 1) Q_{11}^v dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (z^2, z, 1) Q_{11}^{sh} dz + \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} (z^2, z, 1) Q_{11}^{st} dz, \\
(P_{22}^{in}, F_{22}^{in}, J_{22}^{in}) &= \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (z^2, z, 1) Q_{22}^v dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (z^2, z, 1) Q_{22}^{sh} dz + \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} (z^2, z, 1) Q_{22}^{st} dz, \\
(P_{12}^{in}, F_{12}^{in}, J_{12}^{in}) &= \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (z^2, z, 1) Q_{12}^v dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (z^2, z, 1) Q_{12}^{sh} dz, \\
\phi_{1r}^{Tin} &= \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} (Q_{12}^{st} + Q_{11}^{st}) \bar{\alpha}_{st} dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (Q_{12}^v + Q_{11}^v) \bar{\alpha}_v dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (Q_{12}^{sh} + Q_{11}^{sh}) \bar{\alpha}_{sh} dz \\
\phi_{2r}^{Tin} &= \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} (Q_{12}^{st} + Q_{11}^{st}) \bar{\alpha}_{st} z dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (Q_{12}^v + Q_{11}^v) \bar{\alpha}_v z dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (Q_{12}^{sh} + Q_{11}^{sh}) \bar{\alpha}_{sh} z dz \\
\phi_{1r}^{vin} &= \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (Q_{12}^v + Q_{11}^v) \frac{d_v}{h_v} dz = \phi_{1\theta}^{vin}, \quad \phi_{2r}^{vin} = \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (Q_{12}^v + Q_{11}^v) \frac{d_v}{h_v} z dz = \phi_{2\theta}^{vin}.
\end{aligned}$$

$$\phi_{1r}^{Tin} = \phi_{1\theta}^{Tin}, \phi_{2r}^{Tin} = \phi_{2\theta}^{Tin},$$

với vùng giữa $r \in (a_{in}, a_{mi})$:

$$(P_{11}^{mi}, F_{11}^{mi}, J_{11}^{mi}) =$$

$$\int_{h/2}^{h_{st}+h/2} (z^2, z, 1) Q_{11}^{st} \frac{b_{1m}}{d_{1m}} dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (z^2, z, 1) Q_{11}^v dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (z^2, z, 1) Q_{11}^{sh} dz,$$

$$(P_{22}^{mi}, F_{22}^{mi}, J_{22}^{mi}) =$$

$$\int_{h/2}^{h_{st}+h/2} (z^2, z, 1) Q_{22}^{st} \frac{b_{2p}}{d_{2p}} dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (z^2, z, 1) Q_{22}^v dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (z^2, z, 1) Q_{22}^{sh} dz,$$

$$\phi_{1r}^{Tmi} =$$

$$\int_{h/2}^{h_{st}+h/2} (Q_{12}^{st} + Q_{11}^{st}) \bar{\alpha}_{st} \frac{b_{1m}}{d_{1m}} dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (Q_{12}^v + Q_{11}^v) \bar{\alpha}_v dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (Q_{12}^{sh} + Q_{11}^{sh}) \bar{\alpha}_{sh} dz,$$

$$\phi_{1\theta}^{Tmi} =$$

$$\int_{-h/2}^{h_v-h/2} (Q_{22}^v + Q_{12}^v) \bar{\alpha}_v dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (Q_{22}^{sh} + Q_{12}^{sh}) \bar{\alpha}_{sh} dz + \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} (Q_{22}^{st} + Q_{12}^{st}) \bar{\alpha}_{st} \frac{b_{2p}}{d_{2p}} dz,$$

$$\phi_{2r}^{Tmi} =$$

$$\int_{h/2}^{h_{st}+h/2} (Q_{12}^{st} + Q_{11}^{st}) \bar{\alpha}_{st} \frac{b_{1m}}{d_{1m}} z dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (Q_{12}^v + Q_{11}^v) \bar{\alpha}_v z dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (Q_{12}^{sh} + Q_{11}^{sh}) \bar{\alpha}_{sh} z dz,$$

$$\phi_{2\theta}^{Tmi} =$$

$$\int_{h/2}^{h_{st}+h/2} (Q_{12}^{st} + Q_{22}^{st}) \bar{\alpha}_{st} \frac{b_{2p}}{d_{2p}} z dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (Q_{22}^v + Q_{12}^v) \bar{\alpha}_v z dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (Q_{22}^{sh} + Q_{12}^{sh}) \bar{\alpha}_{sh} z dz,$$

$$(P_{12}^{mi}, F_{12}^{mi}, J_{12}^{mi}) = (P_{12}^{in}, F_{12}^{in}, J_{12}^{in}), \phi_{1r}^{vin} = \phi_{1\theta}^{vmi} = \phi_{1r}^{vmi}, \phi_{2\theta}^{vmi} = \phi_{2r}^{vin} = \phi_{2r}^{vmi}.$$

và với vùng gần biên $r \in (a_{mi}, a_{ou}]$:

$$(P_{22}^{ou}, F_{22}^{ou}, J_{22}^{ou}) = (P_{22}^{mi}, F_{22}^{mi}, J_{22}^{mi}), (P_{12}^{ou}, F_{12}^{ou}, J_{12}^{ou}) = (P_{12}^{mi}, F_{12}^{mi}, J_{12}^{mi}),$$

$$\phi_{1\theta}^{Tmi} = \phi_{1\theta}^{Tou}, \phi_{1r}^{vou} = \phi_{1r}^{vin} = \phi_{1\theta}^{vou}, \phi_{2\theta}^{Tmi} = \phi_{2\theta}^{Tou}, \phi_{2r}^{vou} = \phi_{2r}^{vin} = \phi_{2\theta}^{vou}.$$

$$\begin{aligned}
& \left(P_{11}^{ou}, F_{11}^{ou}, J_{11}^{ou} \right) = \\
& \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} 2(z^2, z, 1) Q_{11}^{st} \frac{b_{1m}}{d_{1m}} dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (z^2, z, 1) Q_{11}^v dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (z^2, z, 1) Q_{11}^{sh} dz, \\
& \phi_{1r}^{Tou} = \\
& \int_{h/2}^{h_{st}+h_{st}} 2(Q_{12}^{st} + Q_{11}^{st}) \bar{\alpha}_{st} \frac{b_{1m}}{d_{1m}} dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (Q_{12}^v + Q_{11}^v) \bar{\alpha}_v dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (Q_{12}^{sh} + Q_{11}^{sh}) \bar{\alpha}_{sh} dz, \\
& \phi_{2r}^{Tou} = \\
& \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} 2(Q_{12}^{st} + Q_{11}^{st}) \bar{\alpha}_{st} \frac{b_{1m}}{d_{1m}} z dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} (Q_{12}^v + Q_{11}^v) \bar{\alpha}_v z dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} (Q_{12}^{sh} + Q_{11}^{sh}) \bar{\alpha}_{sh} z dz.
\end{aligned}$$

Các biểu thức trên được thiết lập tổng quát cho gân mạng nhện ba vùng, trường hợp gân mạng nhện hai vùng, các biểu thức nhận được bằng cách cho các thành phần độ cứng và nội lực nhiệt của vùng gân biên bằng không, đồng thời kéo dài miền tích phân của vùng giữa thành $r \in (a_{in}, a_{ou}]$.

Năng lượng biến dạng với các thành phần cơ nhiệt điện, công thực hiện bởi áp lực ngoài, tương tác nền và động năng được trình bày như sau:

$$\begin{aligned}
\Phi_{int} = & +\pi \int_{\Gamma} \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \left[\varepsilon_r \sigma_r + \varepsilon_\theta \sigma_\theta - (\sigma_r + \sigma_\theta) \bar{\alpha}(z) \Delta T - (\sigma_r + \sigma_\theta) V_e(d_v/h_v) \right] r dr dz \\
& + \pi \int_{\Gamma} \int_0^{a_{in}} \left[\varepsilon_r \sigma_r + \varepsilon_\theta \sigma_\theta - (\sigma_r + \sigma_\theta) \Delta T \bar{\alpha}(z) - (\sigma_r + \sigma_\theta) V_e(d_v/h_v) \right] r dr dz \quad (2.23) \\
& + \pi \int_{\Gamma} \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \left[\varepsilon_r \sigma_r + \varepsilon_\theta \sigma_\theta - (\sigma_r + \sigma_\theta) \Delta T \bar{\alpha}(z) - (\sigma_r + \sigma_\theta) V_e(d_v/h_v) \right] r dr dz,
\end{aligned}$$

$$\Phi_{ext} = 2\pi q \int_0^{a_{ou}} w r dr - \pi \int_0^{a_{ou}} \left\{ w \left[\frac{w^3 K_{3n}}{2} - \left(\frac{1}{r} w_{,r} + w_{,rr} \right) K_{2l} + w K_{1l} \right] \right\} r dr, \quad (2.24)$$

$$\Phi_T = \pi \int_{\Gamma} \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \bar{w}_{,t}^2 \bar{\rho}(z) r dr dz + \pi \int_{\Gamma} \int_0^{a_{in}} \bar{w}_{,t}^2 \bar{\rho}(z) r dr dz + \pi \int_{\Gamma} \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \bar{w}_{,t}^2 \bar{\rho}(z) r dr dz, \quad (2.25)$$

trong đó K_{1l} (N/m³) và K_{2l} (N/m) là độ cứng nền đàn hồi Winkler và Pasternak tương ứng, K_{3n} (N/m⁵) là độ cứng phi tuyến của nền đàn hồi, có thể mang giá trị âm hoặc dương tương ứng với nền hóa mềm và nền hóa cứng.

Hàm Lagrange nhận được từ các phương trình (2.23), (2.24) và (2.25) như sau:

$$\Phi = \Phi_T + \Phi_{ext} - \Phi_{int}. \quad (2.26)$$

2.2.2. Dạng nghiệm đa thức và giải bài toán

Điều kiện biên ngầm được áp dụng cho chỏm cầu ở cạnh như sau:

$$\begin{aligned} r=0: \quad u=0, \quad w_{,r}=0, \\ r=a_{ou}: \quad w=0, \quad w_{,r}=0, \quad u=0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

Theo điều kiện biên (2.27), các nghiệm đa thức được chọn như sau [13]:

$$w = \left[\frac{(a_{ou}^2 - r^2)}{a_{ou}^2} \right]^2 W, \quad w^* = \left[\frac{(a_{ou}^2 - r^2)}{a_{ou}^2} \right]^2 \lambda h, \quad u = \frac{-r^2 + a_{ou}r}{a_{ou}^2} U, \quad (2.28)$$

trong đó λ là cỡ của độ không hoàn hảo.

Thế năng cản của hệ được xác định như sau:

$$D = \pi \kappa \int_0^{a_{ou}} w_{,t}^2 r dr \quad (2.29)$$

trong đó κ là hệ số cản của cơ hệ.

Các phương trình Euler–Lagrange nhận được bằng cách kết hợp với hàm tiêu tán Rayleigh như sau:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{W}} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{W}} - \frac{\partial \Phi}{\partial W} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{U}} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial U} = 0, \quad (2.30)$$

dẫn tới:

$$WI_{12} + UI_{11} + \Delta TI_{14} + V_e I_{15} + W(2\lambda h + W)I_{13} = 0, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & UI_{12} + (W + \lambda h)UI_{22} + (W + 4h\lambda/3)WI_{23} + (W + 2\lambda h)(W + \lambda h)WI_{24} \\ & + W^3 K_{3n} I_{25} + (W + \lambda h)\Delta TI_{29} + W(I_{28} + K_{2l}I_{27} + K_{1l}I_{26}) \\ & + \Delta TI_{30} + (W + \lambda h)V_e I_{34} + qI_{31} + V_e I_{35} - \ddot{W} I_{32} - \dot{W} \kappa I_{33} = 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

trong đó I_{ij} được trình bày trong phụ lục.

Bằng cách giải phương trình (2.31), thu được biểu thức biên độ U , sau đó thế biểu thức nhận được vào phương trình (2.32), dẫn tới:

$$\begin{aligned}
& W \left(K_{1l}I_{26} + K_{2l}I_{27} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} + I_{28} \right) - (W + 2\lambda h)W \frac{I_{13}I_{12}}{I_{11}} - (W + \lambda h)W \frac{I_{22}I_{12}}{I_{11}} \\
& + (W + 2\lambda h)(W + \lambda h)W \left(\frac{I_{24}I_{11} - I_{22}I_{13}}{I_{11}} \right) + \left(W + \frac{4}{3}\lambda h \right)WI_{23} + W^3I_{25}K_{3n} \\
& + (W + \lambda h)V_e \left(\frac{I_{34}I_{11} - I_{22}I_{15}}{I_{11}} \right) + (W + \lambda h)\Delta T \left(\frac{I_{29}I_{11} - I_{22}I_{14}}{I_{11}} \right) + qI_{31} \\
& + \Delta T \left(\frac{I_{30}I_{11} - I_{14}I_{12}}{I_{11}} \right) + V_e \left(\frac{I_{35}I_{11} - I_{15}I_{12}}{I_{11}} \right) - \ddot{W}I_{32} - \dot{W}\kappa I_{33} = 0,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Phương pháp Runge-Kutta được áp dụng để giải phương trình vi phân bậc hai theo thời gian (2.33) và thu được các đường cong thời gian-biên độ. Trong chương này, các hàm tuyến tính theo thời gian $q = 9t$ và $\Delta T = \eta t$ được chọn cho áp lực ngoài và tải nhiệt, trong đó 9 (Pa/s) và η (K/s) được định nghĩa là tốc độ đặt tải của tải cơ và nhiệt động tương ứng. Tiêu chuẩn ổn định động phi tuyến Budiansky-Roth [2, 4] có thể được áp dụng để xác định tải tới hạn động phi tuyến của kết cấu.

Bằng cách bỏ qua các thành phần quán tính và cản, phương trình (2.33) trở thành phương trình cân bằng tĩnh và đường cong sau mất ổn định tĩnh cơ của chòm cầu có thể thu được như sau:

$$q = - \left[\begin{aligned} & W \left(K_{1l}I_{26} + K_{2l}I_{27} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} + I_{28} \right) + (\lambda h + W)V_e \left(\frac{I_{34}I_{11} - I_{22}I_{15}}{I_{11}} \right) \\ & - (W + 2\lambda h)W \frac{I_{13}I_{12}}{I_{11}} + (\lambda h + W)\Delta T \left(\frac{I_{29}I_{11} - I_{22}I_{14}}{I_{11}} \right) + K_{3n}W^3I_{25} \\ & + (W + 2\lambda h)(\lambda h + W)W \left(\frac{I_{24}I_{11} - I_{22}I_{13}}{I_{11}} \right) + V_e \left(\frac{I_{35}I_{11} - I_{15}I_{12}}{I_{11}} \right) \\ & + \left(W + \frac{4}{3}\lambda h \right)WI_{23} + \Delta T \left(\frac{I_{30}I_{11} - I_{12}I_{14}}{I_{11}} \right) - (\lambda h + W)W \frac{I_{22}I_{12}}{I_{11}} \end{aligned} \right] \frac{1}{I_{31}}, \tag{2.34}$$

Tương tự như vậy, bằng cách bỏ qua các thành phần quán tính và thành phần cản trong phương trình (2.33), đường cong sau mất ổn định tĩnh nhiệt có thể được xác định như sau:

$$\Delta T = \frac{\left[W \left(K_{1l}I_{26} + K_{2l}I_{27} - \frac{I_{12}^2}{I_{11}} + I_{28} \right) - (\lambda h + W)W \frac{I_{22}I_{12}}{I_{11}} + \left(W + \frac{4}{3}\lambda h \right) WI_{23} \right.}{(\lambda h + W) \left(\frac{I_{22}I_{14} - I_{11}I_{29}}{I_{11}} \right) + \frac{I_{14}I_{12} - I_{11}I_{30}}{I_{11}}} + (W + 2\lambda h)(\lambda h + W)W \left(\frac{I_{24}I_{11} - I_{22}I_{13}}{I_{11}} \right) - (W + 2\lambda h)W \frac{I_{13}I_{12}}{I_{11}} + V_e \left(\frac{I_{35}I_{11} - I_{15}I_{12}}{I_{11}} \right) + (\lambda h + W)V_e \left(\frac{I_{34}I_{11} - I_{22}I_{15}}{I_{11}} \right) + I_{31}q + K_{3n}W^3I_{25} \left. \right]. \quad (2.35)$$

Đối với tấm tròn, hoàn hảo và không gân, bằng cách bỏ qua các thành phần quán tính, cản, không hoàn hảo và phi tuyến trong biểu thức (2.35), tải nhiệt mất ổn định tĩnh của tấm tròn và vỏ cầu thoải nhận được theo tiêu chuẩn ổn định tĩnh [1, 6] bằng cách cho $W \rightarrow 0$.

Bằng cách bỏ qua các thành phần phi tuyến, tải cường bức và độ không hoàn hảo trong biểu thức (2.33), biểu thức tần số dao động tự do tuyến tính của chòm cầu và tấm tròn có gân được thu được như sau:

$$\omega = \sqrt{-\frac{K_{1l}I_{26} + K_{2l}I_{27} - \frac{I_{11}I_{28} + I_{12}^2}{I_{11}} + V_e \left(\frac{I_{34}I_{11} - I_{22}I_{15}}{I_{11}} \right) + \Delta T \left(\frac{I_{29}I_{11} - I_{22}I_{14}}{I_{11}} \right)}{I_{32}}}. \quad (2.36)$$

Với bài toán dao động, từ biểu thức (2.33), tải trọng cường bức được chọn dưới dạng điều hòa $q = Q \sin \Omega t$ cho trường hợp dao động cường bức. Biên độ dao động cũng được giả thiết dưới dạng điều hòa $W = \eta \sin(\Omega t)$. Sau đó, phương pháp cân bằng điều hòa được sử dụng [4], dẫn đến:

$$1 + \frac{3}{4}k_2\eta^2 + \frac{8}{3\pi}k_1\eta + 4\frac{k_5}{\omega^2\eta\pi}V_e + 4\frac{k_3}{\omega^2\eta\pi}\Delta T + \frac{k_4}{\omega^2\eta}Q = -\frac{2\nu\kappa I_{33}}{\omega\pi I_{32}} + \nu^2, \quad (2.37)$$

trong đó tần số dao động không thứ nguyên được định nghĩa là $\nu = \Omega/\omega$ và:

$$k_1 = \frac{-I_{23}I_{11} + I_{12}(I_{22} + I_{13})}{\omega^2 I_{32}I_{11}}, \quad k_2 = \frac{I_{11}(-I_{25}K_{3n} - I_{24}) + I_{13}}{\omega^2 I_{32}I_{11}},$$

$$k_3 = \frac{-I_{30}I_{11} + I_{14}I_{12}}{I_{32}I_{11}}, \quad k_4 = -\frac{I_{31}}{I_{32}}, \quad k_5 = \frac{-I_{35}I_{11} + I_{15}I_{12}}{I_{32}I_{11}}.$$

Bằng cách sử dụng quy trình tính toán đơn giản cho biểu thức (2.37), đường cong tần số-biên độ $\nu - \eta$ được xác định bằng:

$$v = 2 \frac{I_{33} \kappa}{\omega \pi I_{32}} + \sqrt{1 + \frac{3}{4} k_2 \eta^2 + \frac{8}{3\pi} k_1 \eta + \frac{4}{\omega^2 \eta \pi} V_e k_5 + \frac{4}{\omega^2 \eta \pi} \Delta T k_3 - \left(\frac{2}{\pi I_{32} \omega} I_{33} \kappa \right)^2} + \frac{Q}{\eta \omega^2} k_4. \quad (2.38)$$

2.3. Kết quả số và thảo luận

2.3.1. Kết quả so sánh

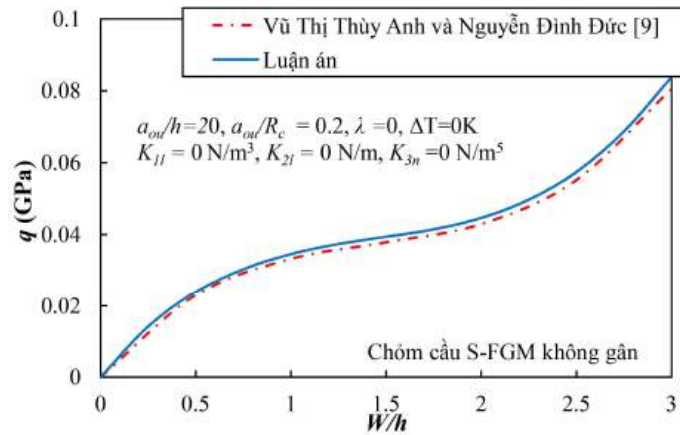
Để xác thực độ tin cậy của các công thức thu được, luận án thực hiện so sánh với nghiên cứu của Vũ Thành Long và Hoàng Văn Tùng [79] trong trường hợp tải nhiệt tới hạn của tấm tròn FGM không có gân tăng cứng như trong Bảng 2.1. Trong đó, E_m là mô đun đàn hồi của kim loại, N là chỉ số tỷ phần thể tích và các phương trình chủ đạo trong nghiên cứu [79] được thiết lập dựa trên phương pháp Galerkin và lý thuyết vỏ Donnell. Dễ dàng nhận thấy rằng đối với tấm tròn không gia cường, tải mất ổn định tới hạn nhận được rất phù hợp với kết quả của Vũ Thành Long và Hoàng Văn Tùng [79].

Bảng 2.1. So sánh tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} (K) của tấm tròn FGM không có gân tăng cứng

$$(a_{ou}/h = 50, K_{1l} = k_{1l} \frac{h^3 E_m}{a_{ou}^4}, K_{2l} = k_{2l} \frac{h^3 E_m}{a_{ou}^2})$$

(k_{1l}, k_{2l})		$N = 5$	$N = 1$	$N = 0.5$	$N = 0$
(5,1)	Long và Tùng [79]	85.27	71.67	66.86	59.42
	Luận án	85.29	71.69	66.87	59.42
(5,0)	Long và Tùng [79]	62.63	51.64	47.66	40.89
	Luận án	62.64	51.66	47.68	40.89
(0,0)	Long và Tùng [79]	45.65	36.61	33.27	26.98
	Luận án	45.66	36.64	33.29	26.98

So sánh thứ hai về ứng xử sau mất ổn định của chòm cầu thoải S-FGM không có gân tăng cứng được biểu diễn trên Hình 2.5. Đường cong sau mất ổn định của nghiên cứu này được so với đường cong sau mất ổn định của các tác giả Vũ Thị Thùy Anh và Nguyễn Đình Đức [9]. Trong nghiên cứu [9], chòm cầu được làm bằng vật liệu FGM với quy luật phân bố lũy thừa Sigmoid (S-FGM); chỉ số tỷ phần thể tích N được chọn là 1. Các phương trình cơ bản trong công trình nghiên cứu nói trên dựa vào FSDT và phương pháp Galerkin để thiết lập. Từ kết quả thu được trong Hình 2.5, có thể thấy các đường cong sau mất ổn định thu được dựa trên nghiên cứu của luận án phù hợp với đường cong sau mất ổn định thu được bởi Vũ Thị Thùy Anh và Nguyễn Đình Đức [9].



Hình 2.5. So sánh đường cong sau mất ổn định của chòm cầu thoải S-FGM không có gân tăng cứng

Bảng 2.2. So sánh hệ số tần số dao động tự do tuyến tính không thứ nguyên

$\bar{\omega} = \omega / \left(\frac{h}{a_{ou}} \sqrt{\frac{E_m}{a_{ou}^2 \rho_m}} \right)$ của chòm cầu đẳng hướng ($\bar{H}_1/h = 5$, $\bar{H}_1 = a_{ou}^2/2R_c$).

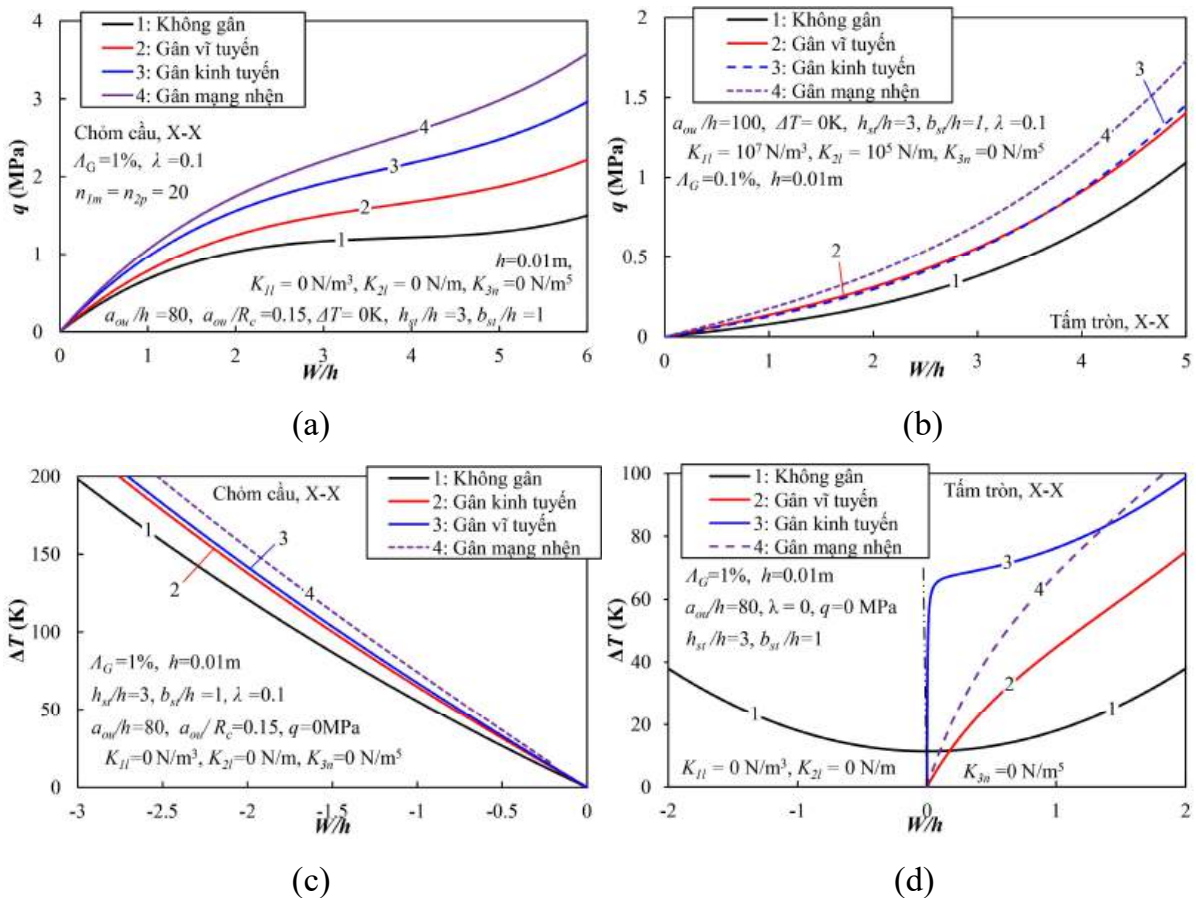
	$\bar{\omega}$
Bucco và Mazumdar [22]	13.266
Haboussi và các cộng sự [53]	13.37
Kalnins và Naghdi [65]	13.14
Luận án	13.80

So sánh các hệ số tần số dao động tự do tuyến tính không thứ nguyên được trình bày trong Bảng 2.2. Có thể nhận thấy rằng, hệ số tần số dao động tự do tuyến tính thu được của luận án cho thấy sự phù hợp với các công trình trước đây của Bucco và Mazumdar [22], Habaoussi và các cộng sự [53] và Kalnins và Naghdi [65].

2.3.2. Bài toán 1: Ổn định cơ nhiệt phi tuyến tĩnh của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC có gân mạng nhện 2 vùng

Trong phần này, các tính chất vật liệu của FG-GPLRC và vật liệu nền được chọn như trong nghiên cứu của Wang và các cộng sự. [160]. Tấm tròn và chòm cầu thoải được đặt trên nền đàn hồi phi tuyến và không có lớp áp điện. Các thông số hình học, vật liệu của kết cấu được trình bày chi tiết trong các khảo sát dưới đây. Có thể tham khảo các tiêu chuẩn ổn định tĩnh phi tuyến và ứng xử sau mất ổn định phi tuyến được trình bày chi tiết trong các luận án tiến sĩ của Cao Văn Đoàn [1] và Nguyễn Văn Tiến [6].

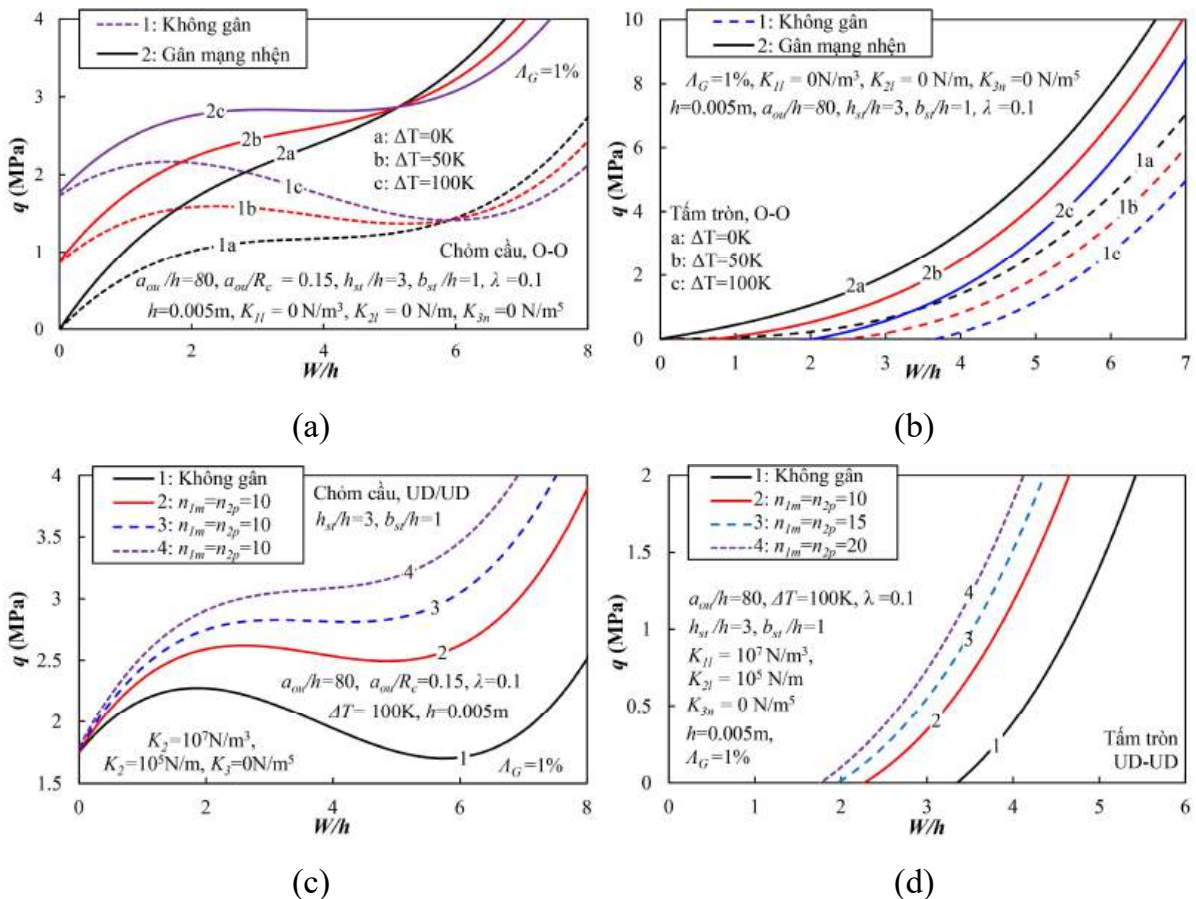
Hình 2.6a, b, c và d khảo sát ảnh hưởng của gân tăng cứng và loại gân tăng cứng lên ứng xử sau mất ổn định của các chòm cầu thoải và các tấm tròn FG-GPLRC dưới tác dụng của tải áp lực ngoài (Hình 2.6a, b) hoặc tải nhiệt (Hình 2.6c, d). Bốn trường hợp cụ thể được xem xét lần lượt là: chòm cầu/tấm tròn không có gân tăng cứng (1); chòm cầu/tấm tròn được gia cường bởi 20 gân tăng cứng theo hướng vĩ tuyến (hướng vòng) (2); chòm cầu/tấm tròn được gia cường bởi 20 gân tăng cứng kinh tuyến (hướng tâm) (3); chòm cầu/tấm tròn được gia cường bằng 20 gân vĩ tuyến và 20 gân kinh tuyến (gân mạng nhện) (4).



Hình 2.6. Ảnh hưởng của gân tăng cứng và loại gân tăng cứng lên ứng xử sau mất ổn định của chòm cầu thoải/tấm tròn FG-GPLRC

Trong Hình 2.7a, b và các Hình 2.8-2.10, với trường hợp chòm cầu/tấm tròn có gân mạng nhện, các kết quả bằng số được nghiên cứu đối với chòm cầu thoải được tăng cứng bằng 20 gân vĩ tuyến và 20 gân kinh tuyến. Dễ dàng quan sát thấy ảnh hưởng tích cực của các gân tăng cứng lên ứng xử sau mất ổn định của chòm cầu/tấm tròn (Hình 2.6a, b, c, d). Các gân tăng cứng làm tăng đáng kể khả năng chịu tải cơ và nhiệt của tấm tròn/chòm cầu. Trong đó, khả năng chịu tải của các kết cấu được tăng cứng bằng hệ gân

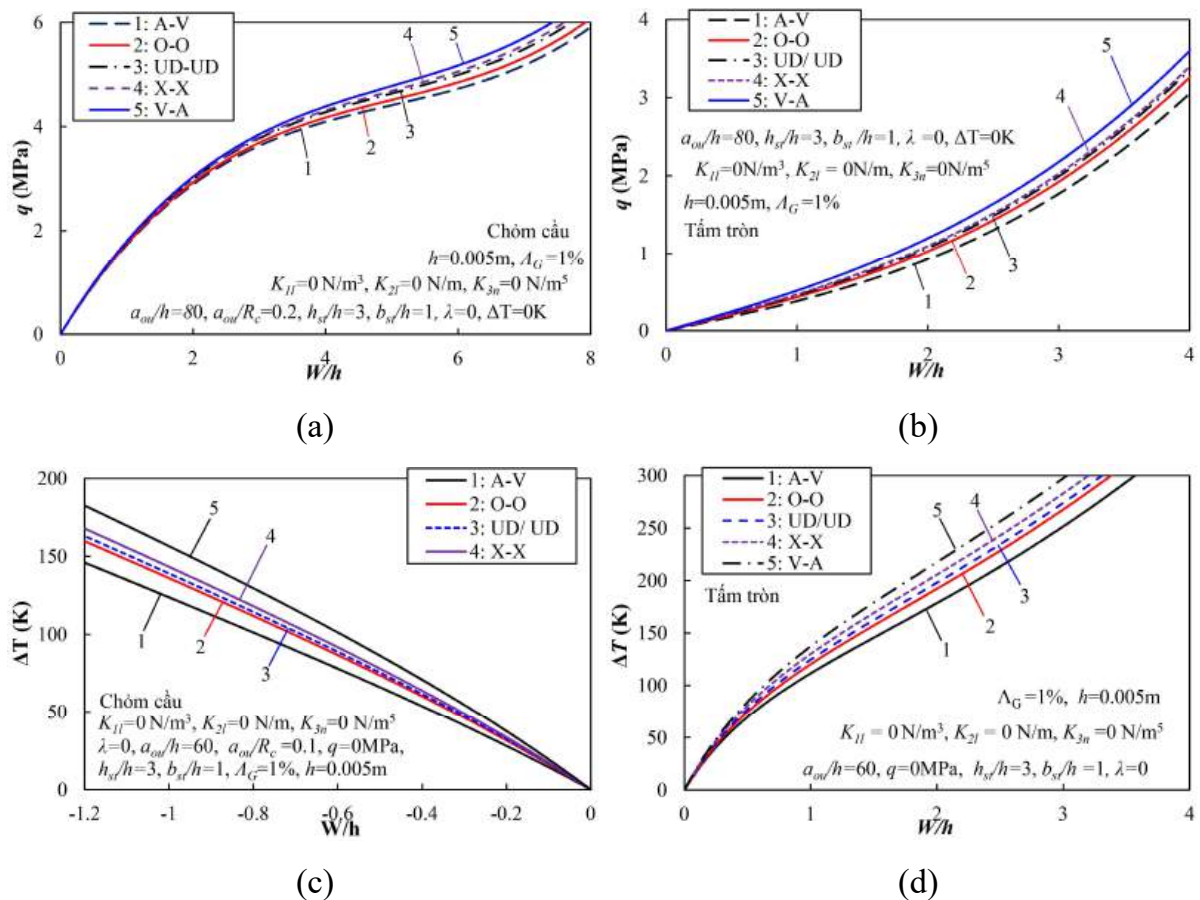
tăng cứng mạng nhện là tốt nhất (Hình 2.6a, b, c, d). Xu hướng tương tự cũng nhận được đối với ứng xử sau mất ổn định của tấm tròn. Một số hiệu ứng đặc biệt được quan sát thấy trong Hình 2.6d với các đường cong sau mất ổn định của tấm tròn có gân tăng cứng chịu tải trọng nhiệt như: hiện tượng mất ổn định rẽ nhánh chỉ được quan sát đối với tấm tròn hoàn hảo không có gân tăng cứng, chỉ chịu tác dụng của nhiệt độ; ngược lại, điều này không xảy ra đối với các tấm tròn có gân tăng cứng. Có thể giải thích rằng, khi tấm được gia cường bởi gân vĩ tuyến hoặc bởi gân kinh tuyến, trạng thái màng không tồn tại và độ võng xuất hiện ngay khi tấm bắt đầu chịu tải trọng tác dụng. Hơn nữa, đối với tấm tròn có hoặc không có gân tăng cứng, miền biến dạng của tấm có thể quan sát thấy trong miền biến dạng dương. Ngược lại, đối với chòm cầu thoải, miền biến dạng của vỏ chỉ quan sát được ở miền biến dạng âm.



Hình 2.7. Ảnh hưởng của nhiệt độ và số lượng gân tăng cứng lên các đường cong sau mất ổn định cơ học của chòm cầu thoải/tấm tròn FG-GPLRC

Ảnh hưởng đáng kể của nhiệt độ lên các đường cong sau mất ổn định cơ học của chòm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC được thể hiện trong Hình 2.7a,b. Có thể thấy, đối với chòm cầu thoải có hay không có gân tăng cứng, khi chịu tác dụng của áp lực

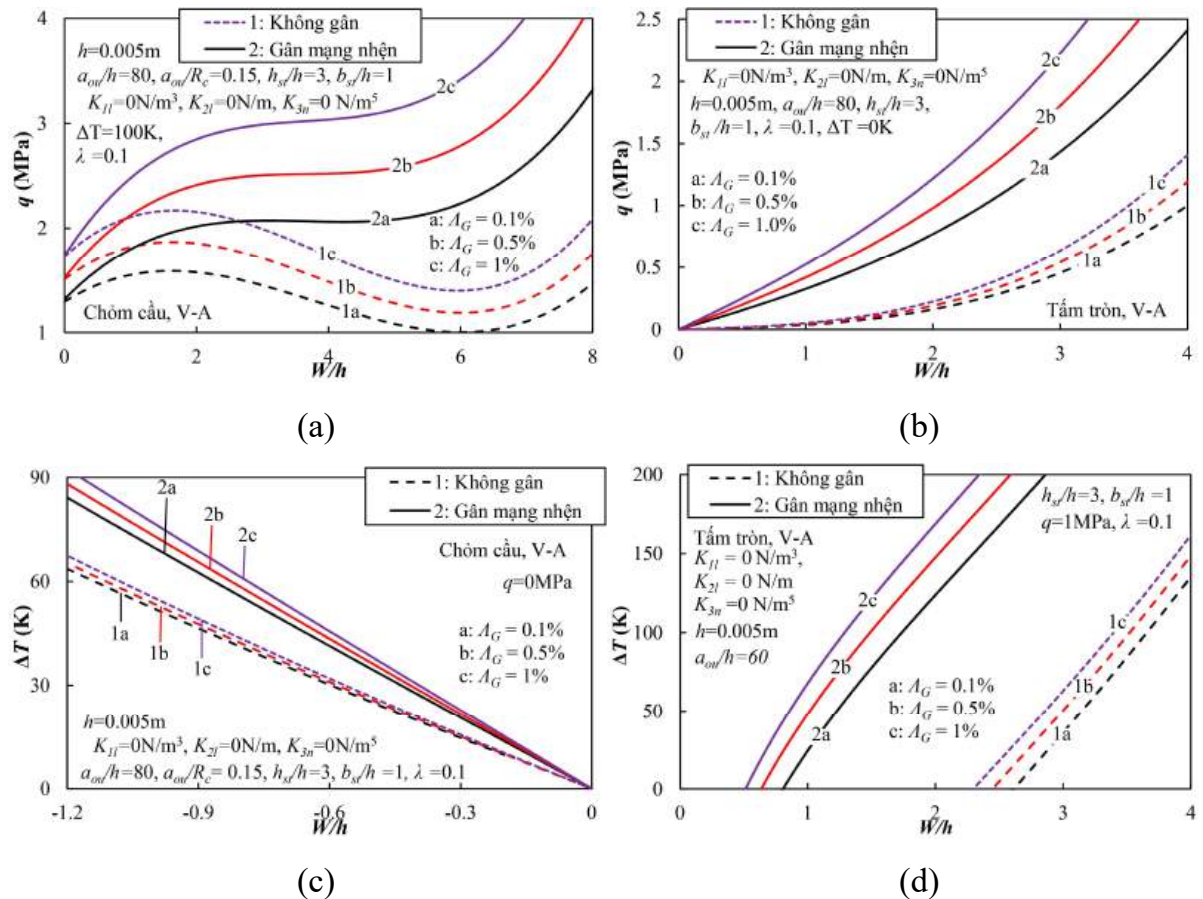
ngoài và nhiệt, hiện tượng snap-through tăng khi nhiệt độ tăng (Hình 2.7a). Tuy nhiên, đối với chòm cầu có gân tăng cứng, hiện tượng snap-through xảy ra nhẹ hơn, đồng thời khi nhiệt độ tăng, cường độ snap-through cũng ko tăng mạnh như đối với trường hợp vỏ không gân. Điều này cho thấy việc tăng cứng cho chòm cầu bằng gân mạng nhện giúp vỏ tăng khả năng chịu lực trong môi trường nhiệt độ cao, đồng thời giảm thiểu được hiện tượng snap-through là một hiện tượng bất lợi đối với kết cấu chòm cầu khi chịu tác dụng của áp lực ngoài và nhiệt. Hình 2.7b cho thấy rằng, đối với một tấm tròn chịu tải trọng cơ và nhiệt kết hợp, độ võng trước do nhiệt độ xuất hiện trước khi tấm chịu ảnh hưởng của tải áp lực ngoài. Khi nhiệt độ tăng, độ võng trước do nhiệt cũng tăng lên. Trong khi đó, với các tấm tròn có gân mạng nhện, độ võng trước do nhiệt giảm một cách đáng kể. Ngoài ra, đối với các tấm tròn hoặc chòm cầu thoải được tăng cứng bằng hệ gân mạng nhện, khi số lượng gân tăng lên thì khả năng chịu tải của kết cấu tăng lên, cường độ snap-through của chòm cầu giảm rõ rệt (Hình 2.7c), độ võng trước do nhiệt của tấm tròn cũng giảm (trong Hình 2.7d).



Hình 2.8. Đường cong sau mất ổn định phi tuyến của chòm cầu/tấm tròn FG-GPLRC có gân tăng cứng với các quy luật phân bố vật liệu khác nhau

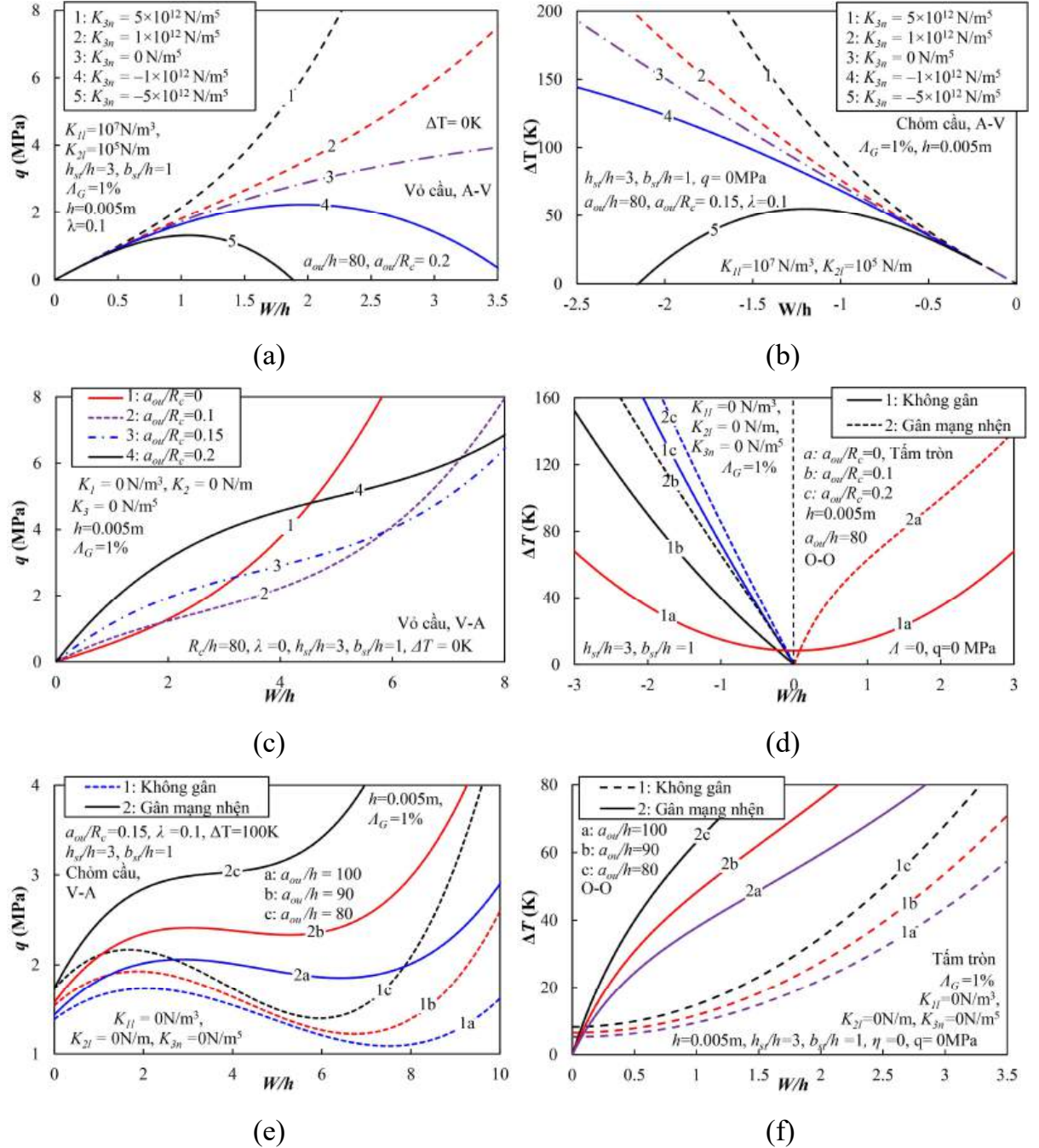
Các đường cong sau mất ổn định của chòm cầu và tấm tròn có gân tăng cứng với năm trường hợp phân bố vật liệu được xem xét trên Hình 2.8a,b,c,d. Đối với các hình minh họa, khả năng chịu tải cơ và nhiệt tốt nhất được ghi nhận đối với chòm cầu thoải và tấm tròn có kiểu phân bố FG-V/FG-A, tiếp theo lần lượt là FG-X/FG-X, UD/UD và FG-O với các đường cong sau mất ổn định của kết cấu tương đối gần nhau. Trong khi đó, khả năng chịu tải của chòm cầu thoải hoặc tấm tròn với quy luật phân bố vật liệu FG-A/FG-V là thấp nhất. Đây là một nhận xét đáng chú ý cho cho các nhà thiết kế kết cấu khi thiết kế chòm cầu thoải/tấm tròn làm từ vật liệu FG-GPLRC có gân tăng cứng.

Hình 2.9a, b, c và d mô tả ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL lên ứng xử sau mất ổn định phi tuyến của các chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC. Khả năng chịu tải cơ và nhiệt của các kết cấu có và không có gân tăng cứng đều tăng lên khi Λ_G tăng. Tuy nhiên, những ảnh hưởng này đối với chòm cầu/ tấm tròn có gân tăng cứng là đáng kể hơn so với các chòm cầu/ tấm tròn không có gân tăng cứng.



Hình 2.9. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng Λ_G của GPL lên ứng xử sau mất ổn định phi tuyến của các chòm cầu/tấm tròn FG-GPLRC có gân tăng cứng

Ứng xử sau mất ổn định phi tuyến của chòm cầu thoải/tấm tròn FG-GPLRC có gân tăng cứng với độ cứng nền phi tuyến K_{3n} khác nhau và các giá trị của các thông số hình học a_{ou}/R_c và a_{ou}/h khác nhau được nghiên cứu trong các Hình 2.10a, b, c, d, e và f. Dễ dàng nhận thấy các thông số này có ảnh hưởng rất lớn đến khả năng chịu tải của chòm cầu và tấm tròn có gân tăng cứng.

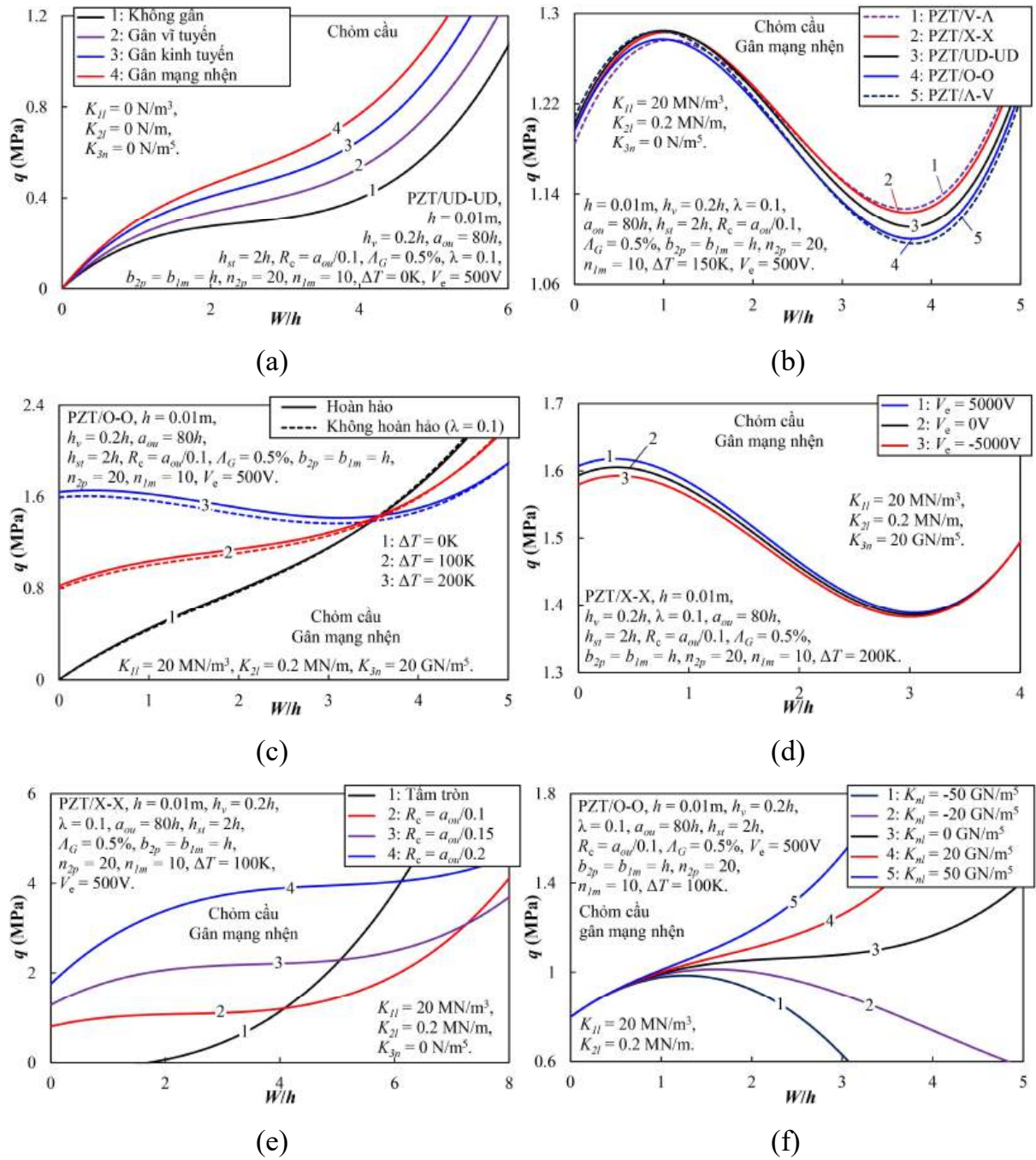


Hình 2.10. Ảnh hưởng của các độ cứng nền phi tuyến và thông số hình học lên ứng xử sau mất ổn định của chòm cầu/tấm tròn FG-GPLRC có gân tăng cứng

Đặc biệt, Hình 2.10a, b cho thấy các đường cong sau mất ổn định phi tuyến của kết cấu cao hơn khi độ cứng của nền đàn hồi phi tuyến tăng đối với các giá trị dương K_{3n} và xu hướng đi lên của các đường cong sau mất ổn định của chòm cầu và tấm tròn có gân tăng cứng cũng được ghi nhận. Ngược lại, đối với các giá trị âm của K_{3n} , xu hướng đi xuống của các đường cong này thu được trong độ võng lớn. Hình 2.10c, d mô tả ảnh hưởng của tỷ số a_{ou}/R_c đến trạng thái sau mất ổn định phi tuyến của các chòm cầu thoải/tấm tròn có gân chịu tác dụng của tải trọng cơ hoặc nhiệt. Kết quả thu được cho thấy các đường cong này cao hơn khi tỷ lệ a_{ou}/R_c tăng, tương ứng với độ thoải của chòm cầu giảm. Ngoài ra, xu hướng của các đường cong sau mất ổn định của các tấm tròn và chòm cầu thoải là rất khác nhau, đặc biệt đối với các đường cong sau mất ổn định nhiệt (Hình 2.10d). Cụ thể, đối với các tấm tròn hoàn hảo không có gân tăng cứng chịu tác dụng của tải nhiệt, hiện tượng mất ổn định kiểu rẽ nhánh được quan sát rõ ràng (Hình 2.6d, Hình 2.10d, f). Nhưng đối với các tấm tròn có gân tăng cứng và các chòm cầu thoải có/ không có gân tăng cứng, hiện tượng này không xảy ra. Hơn nữa, miền biến dạng âm có thể được quan sát đối với chòm cầu thoải có/ không có gân tăng cứng thay vì miền biến dạng dương đối với các tấm tròn có/ không có gân tăng cứng. Ảnh hưởng của tỷ số a_{ou}/h - tỷ số đại diện cho độ dày của vỏ đến ứng xử sau mất ổn định của chòm cầu và tấm tròn được phản ánh rất rõ ràng trên Hình 2.10e, f. Một lần nữa có thể thấy rằng ảnh hưởng của tỷ số a_{ou}/h lên các đường cong sau mất ổn định cơ, nhiệt của chòm cầu/tấm tròn có gân là rõ ràng hơn so với ảnh hưởng của chòm cầu/tấm tròn không gân. Hình 2.10e cũng cho thấy hệ gân tăng cứng mạng nhện làm giảm đáng kể cường độ snap-through của chòm cầu, đặc biệt đối với các vỏ mỏng hơn.

2.3.3. Bài toán 2: Ổn định cơ nhiệt phi tuyến tĩnh và động của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng

Trong bài toán này, chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC được xem xét có gân mạng nhện ba vùng, đặt trên nền đàn hồi phi tuyến với lớp áp điện. Tính chất vật liệu của FG-GPLRC được chọn tương tự bài toán 1. Với bài toán ổn định động, tiêu chuẩn ổn định Budiansky-Roth có thể được tham khảo trong luận án tiến sĩ của Đặng Thùy Đông [2] và Vũ Hoài Nam [4].



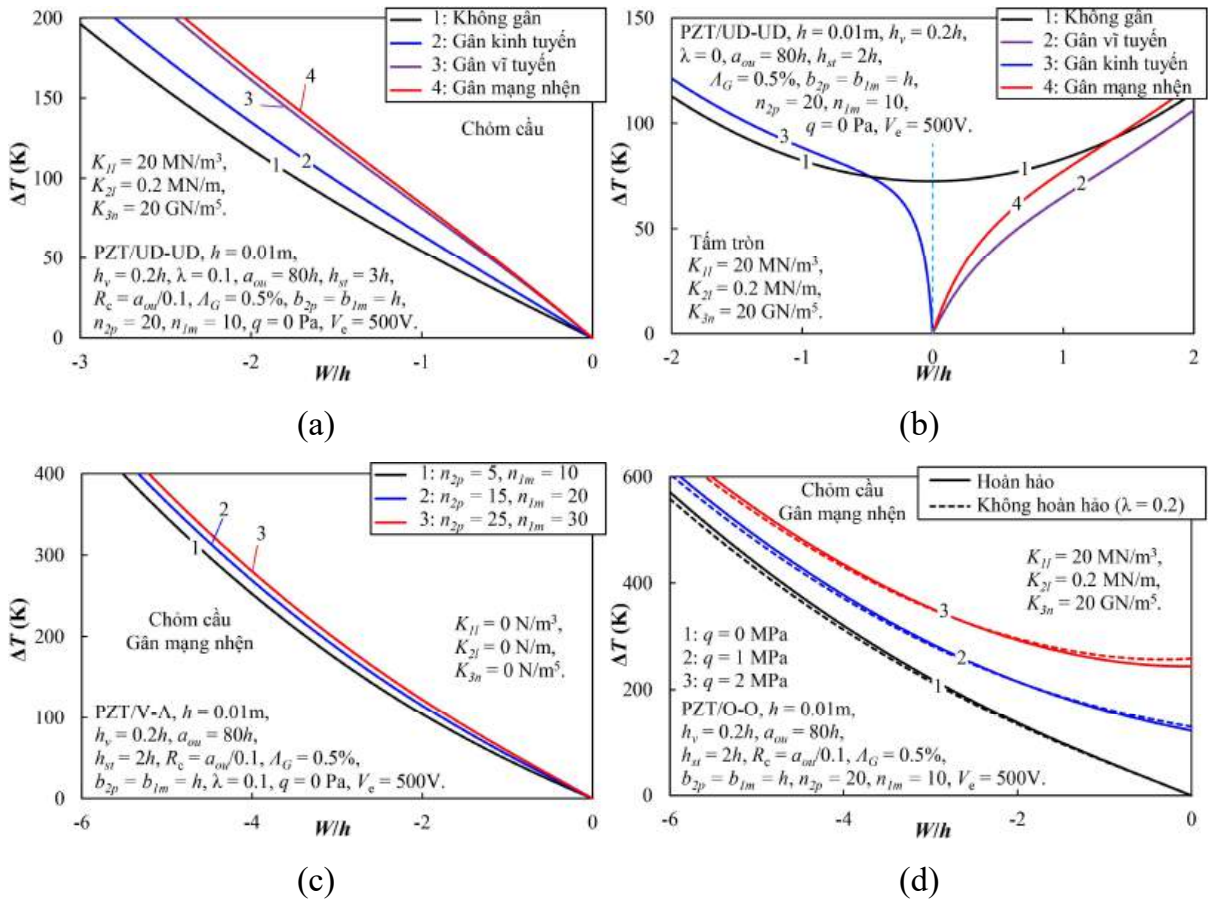
Hình 2.11. Đường cong sau mất ổn định tĩnh của tấm tròn và chòm cầu có gân mạng nhện ba vùng chịu áp lực ngoài

Hình 2.11 trình bày ứng xử sau mất ổn định tĩnh của tấm tròn và chòm cầu thoải có gân mạng nhện ba vùng dưới ảnh hưởng của các yếu tố khác nhau. Hình 2.11a minh họa tác động của các loại gân khác nhau lên chòm cầu, bao gồm trường hợp không gân, gân vĩ tuyến, gân kinh tuyến và gân mạng nhện. Kết quả cho thấy sự ổn định của kết cấu được cải thiện khi hệ gân được thêm vào, như được chứng minh bằng đường cong sau mất ổn định áp lực ngoài cao hơn. Qua ví dụ này có thể thấy rõ tính ưu việt của gân kinh

tuyến so với gân vĩ tuyến. Trong Hình 2.11b, các ảnh hưởng của các quy luật phân bố GPL lên chòm cầu có gân mạng nhện và lớp áp điện được nghiên cứu. Kết quả cho thấy sự khác biệt trong các quy luật phân bố GPL dẫn đến những thay đổi đáng chú ý trong đường cong sau mất ổn định. Có thể thấy xu hướng ngược lại trong các vùng độ võng nhỏ và lớn, trong khi khả năng chịu tải của vỏ PZT/A-V được thể hiện trong vùng độ võng nhỏ, thì trong vùng độ võng lớn, lợi thế này thuộc về vỏ PZT/V-A. Tác động của nhiệt độ tăng đều lên ứng xử sau mất ổn định của chòm cầu với gân mạng nhện trong cả trường hợp hoàn hảo và không hoàn hảo được thể hiện trong Hình 2.11c. Khi nhiệt độ tăng, khả năng chịu tải sau mất ổn định của vỏ cũng tăng lên. Nhiệt độ tăng trước khi gia tải áp lực ngoài tạo ra độ võng âm trước, dẫn đến độ cao đáng kể của đường cong sau mất ổn định của vỏ ở vùng có độ võng nhỏ. Đặc biệt, các đường cong sau mất ổn định ở các nhiệt độ khác nhau dường như hội tụ tại một điểm và thứ tự độ cao của chúng đảo ngược sau điểm hội tụ. Với các giá trị nhiệt độ nhỏ, không quan sát được hiện tượng snap-through, ngược lại có thể được quan sát rõ rệt với các giá trị nhiệt độ lớn. Hình 2.11d phân tích các đường cong sau mất ổn định dưới tác động của điện áp của lớp áp điện. Các trường hợp điện áp âm, dương và bằng không được áp dụng, từ đó thấy rằng điện áp cao hơn có xu hướng làm tăng khả năng chịu tải sau mất ổn định đối với độ võng nhỏ, các đường cong sau mất ổn định tiến sát lại gần nhau khi độ võng lớn. Hình 2.11e chứng minh tác động của bán kính chính đối với ứng xử sau mất ổn định, trong đó việc tăng bán kính chính làm giảm khả năng chịu tải sau mất ổn định của kết cấu khi độ võng nhỏ, có thể thấy ảnh hưởng lớn của các thông số hình học trong việc xác định sự ổn định của kết cấu và xu hướng này trở nên phức tạp và khó dự đoán khi độ võng lớn. Hình 2.11f khảo sát ảnh hưởng của độ cứng nền phi tuyến tới ứng xử sau mất ổn định của vỏ. Kết quả cho thấy độ cứng nền phi tuyến làm tăng khả năng chịu tải sau mất ổn định, xu hướng đi lên và đi xuống của đường cong tương ứng với độ cứng phi tuyến của nền đàn hồi mang giá trị dương và âm.

Hình 2.12 minh họa ứng xử sau mất ổn định tĩnh của tấm tròn và chòm cầu có gân ba vùng chịu tải nhiệt, làm nổi bật ảnh hưởng của gân mạng nhện, áp lực ngoài trước và các thông số hình học tới ứng xử ổn định của kết cấu. Hình 2.12a trình bày ảnh hưởng của các loại gân khác nhau bao gồm trường hợp không gân, gân kinh tuyến, gân vĩ tuyến và gân mạng nhện tới đường cong sau mất ổn định của vỏ, có thể thấy rằng gân tăng

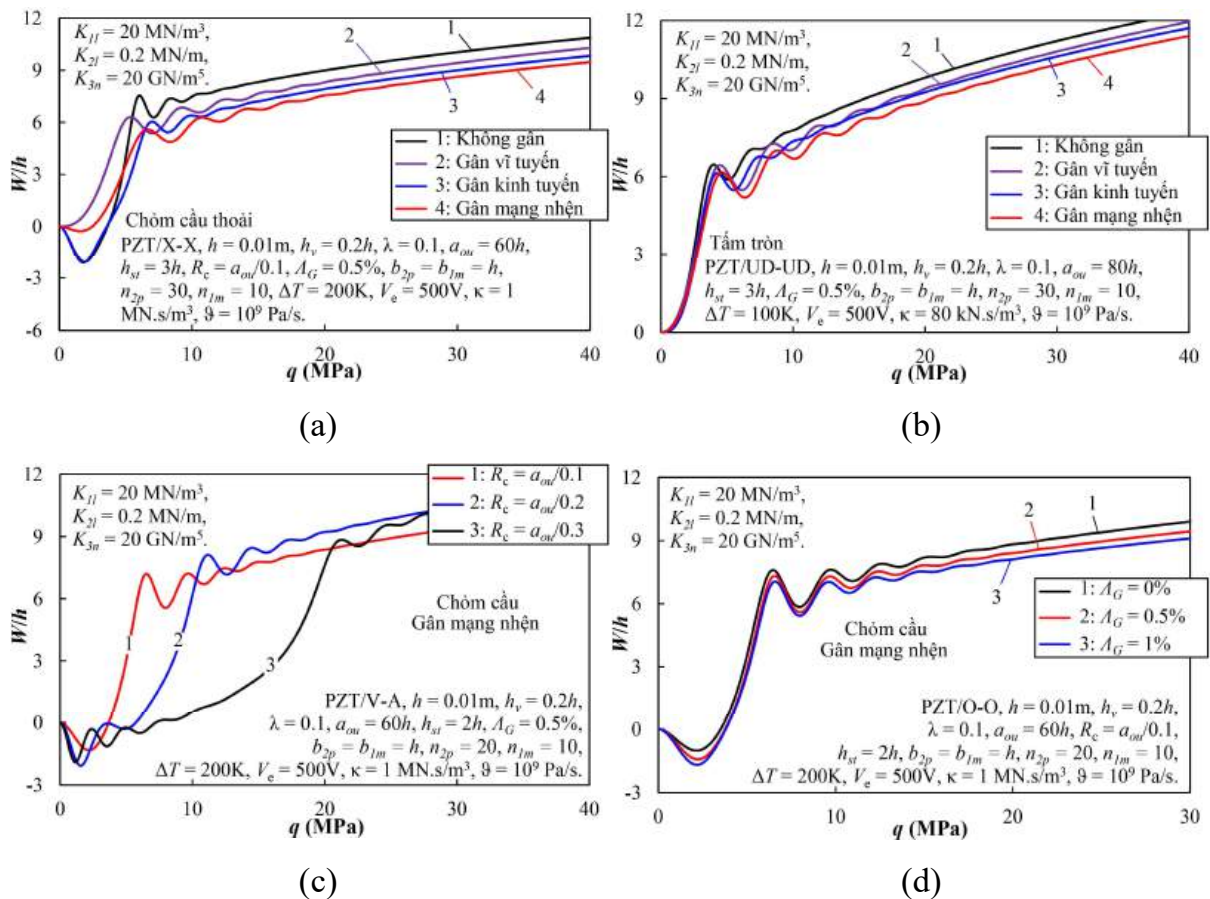
cứng làm tăng đáng kể khả năng chịu tải sau mất ổn định nhiệt của kết cấu. Đặc biệt, gân mạng nhện làm tăng độ cứng lớn nhất, giảm độ võng và tăng khả năng chịu tải sau mất ổn định nhiệt.



Hình 2.12. Đường cong sau mất ổn định tĩnh của tấm tròn và chòm cầu có gân ba vùng chịu tải nhiệt

Trong Hình 2.12b, các xu hướng phức tạp của đường cong sau mất ổn định được quan sát với tấm tròn, trong đó gân mạng nhện một lần nữa thể hiện ảnh hưởng vượt trội ở miền độ võng lớn. Ở miền độ võng nhỏ, độ võng âm hoặc dương thu được cho các trường hợp khác nhau và hiện tượng rẽ nhánh chỉ được thấy đối với tấm tròn không gân. Hình 2.12c khảo sát chi tiết hơn tác động của số lượng gân, cho thấy rằng việc tăng số lượng gân làm tăng độ cứng tổng thể của kết cấu, dẫn đến khả năng chịu tải sau mất ổn định nhiệt của vỏ cao hơn. Ảnh hưởng của áp lực ngoài trước được thể hiện trong Hình 2.12d, trong đó áp lực ngoài trước cao hơn dẫn đến khả năng chịu tải sau mất ổn định nhiệt lớn hơn. Gia tải áp lực ngoài trước cho kết cấu tạo ra trường ứng suất nén chống lại sự giãn nở nhiệt, do đó làm tăng khả năng chịu tải sau mất ổn định nhiệt, tuy nhiên, ảnh hưởng này giảm khi độ võng tăng.

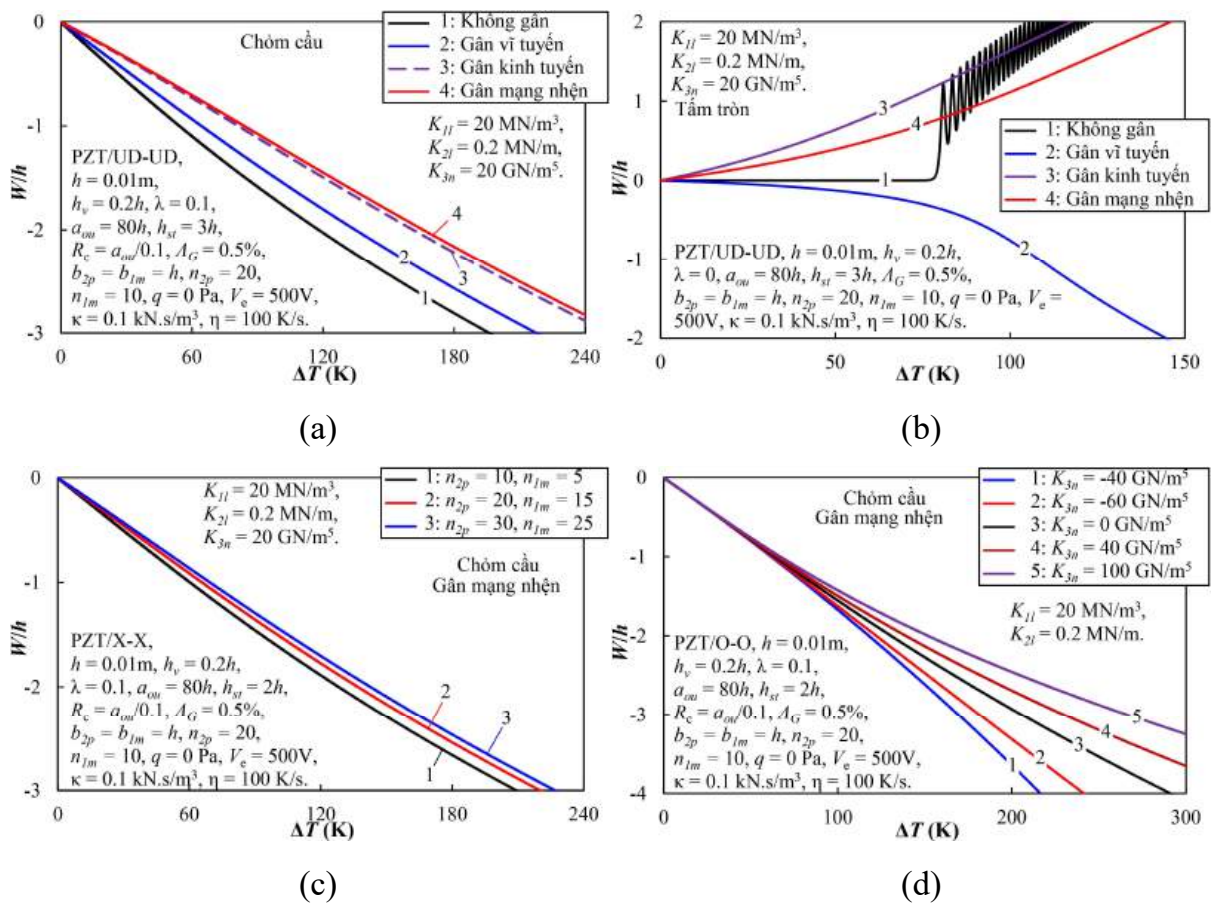
Hình 2.13 trình bày đáp ứng mất ổn định động của tấm tròn và chòm cầu có gân ba vùng chịu áp lực ngoài với các loại gân, bán kính chính, tỷ phần khối lượng GPL, bán kính cơ sở và độ cứng nền phi tuyến khác nhau. Trong Hình 2.13a và b, ảnh hưởng của các loại gân tăng cứng khác nhau, bao gồm trường hợp vỏ không gân, gân kinh tuyến, gân vĩ tuyến và gân mạng nhện, cho thấy gân làm tăng đáng kể khả năng chịu tải động của kết cấu, đặc biệt là ở trạng thái sau mất ổn định. Hình 2.13c khảo sát ảnh hưởng của bán kính chính lên chòm cầu, chỉ ra rằng các vỏ thoải hơn dễ bị mất ổn định hơn dưới áp lực bên ngoài. Trong Hình 2.13d, ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL được khảo sát, với tỷ phần khối lượng GPL cao hơn dẫn đến độ cứng kết cấu lớn hơn và khả năng chịu tải sau mất ổn định động được tăng cường. Điều này là do tỷ lệ mô đun đàn hồi trên khối lượng cao của GPL, góp phần làm tăng độ cứng mà không làm tăng đáng kể tổng khối lượng của kết cấu.



Hình 2.13. Đáp ứng động mất ổn định của tấm tròn và chòm cầu có gân ba vùng chịu áp lực ngoài

Hình 2.14 khảo sát đáp ứng mất ổn định động của tấm tròn và chòm cầu có gân ba vùng chịu tải nhiệt. Các hình 2.14a, b, c, d phân tích nhiều thông số khác nhau, chẳng

hạn như loại gân, số lượng gân và độ cứng nền phi tuyến, để đánh giá tác động của chúng đến sự ổn định của kết cấu dưới tải trọng nhiệt. Hình 2.14a cho thấy tác động của các loại gân khác nhau (gân kinh tuyến, vĩ tuyến và mạng nhện) đến đáp ứng mất ổn định động của chòm cầu. Kết quả cho thấy sự hiện diện của gân làm tăng khả năng chịu tải của chòm cầu, gân mạng nhện cung cấp khả năng chịu tải nhiệt cao nhất. Trong Hình 2.14b, một so sánh tương tự được thực hiện đối với tấm tròn. Hiện tượng snap-through (mất ổn định đột ngột) chỉ xuất hiện với tấm tròn không gân, trong khi đường cong đáp ứng động trong các trường hợp còn lại tăng dần và vùng mất ổn định không được thể hiện rõ ràng.



Hình 2.14. Đáp ứng động mất ổn định của tấm tròn và chòm cầu có gân ba vùng chịu tải nhiệt

Hình 2.14c khảo sát ảnh hưởng của số lượng gân đến đáp ứng động của Chòm cầu. Kết quả cho thấy việc tăng số lượng gân cải thiện khả năng chịu tải nhiệt động rõ rệt. Vở có nhiều gân hơn duy trì được sự ổn định về mặt kết cấu trong phạm vi thay đổi nhiệt độ rộng hơn, cho thấy số lượng gân cao hơn cung cấp khả năng hỗ trợ tốt hơn chống lại ứng suất do nhiệt gây ra. Hình 2.14d nghiên cứu tác động của độ cứng nền phi

tuyến tới đáp ứng mất ổn định nhiệt. Khi độ cứng nền phi tuyến tăng lên, khả năng chịu tải nhiệt động được tăng lên rõ rệt.

2.3.4. Bài toán 3: Ổn định cơ nhiệt phi tuyến tĩnh và động của chỏm cầu và tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện ba vùng

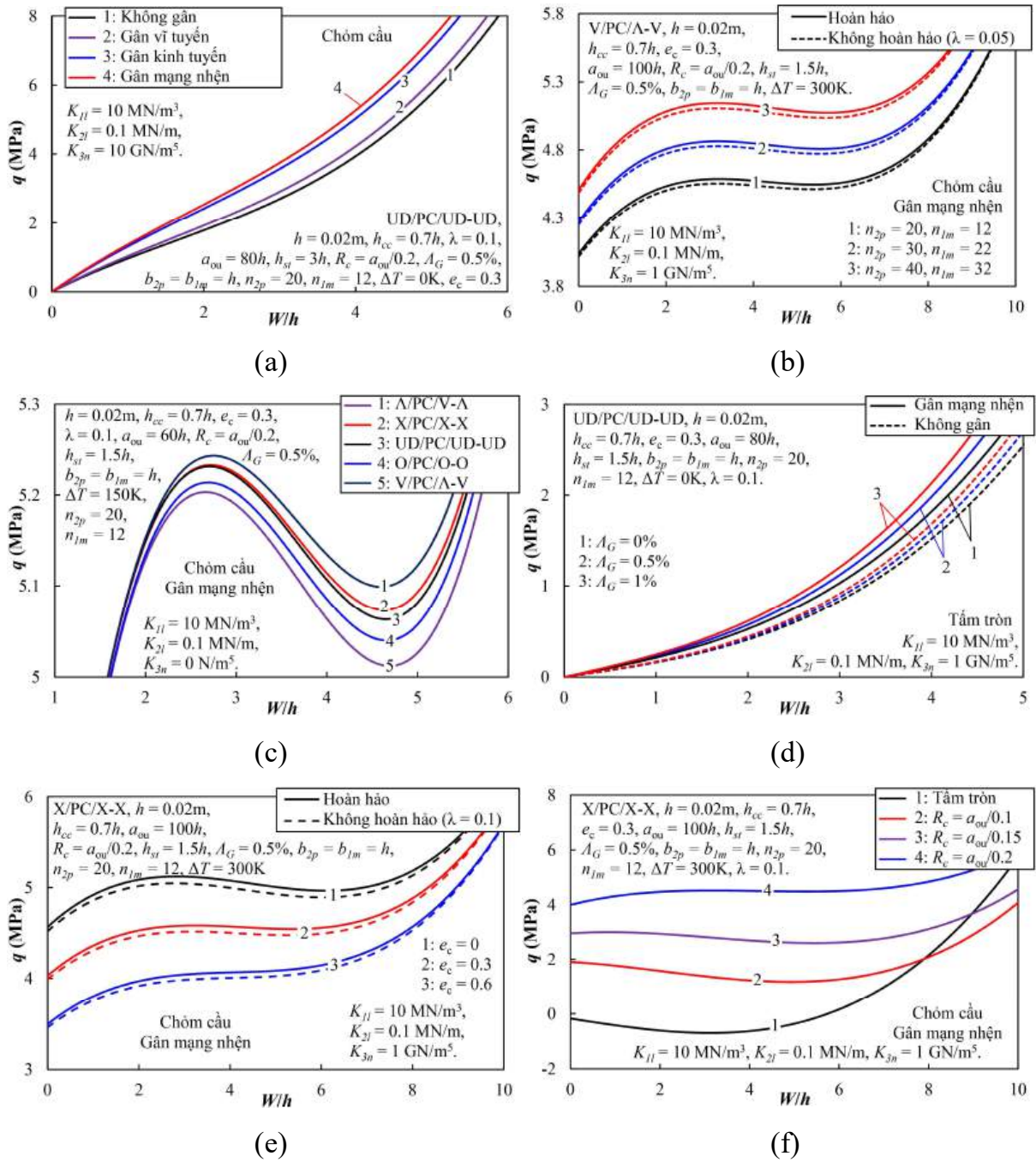
Trong bài toán này, chỏm cầu và tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng được xem xét có gân mạng nhện ba vùng, đặt trên nền đàn hồi phi tuyến và không có lớp áp điện. Tính chất vật liệu của FG-GPLRC được chọn tương tự các bài toán trước.

Bảng 2.3 trình bày tải trọng mất ổn định nhiệt tới hạn động của tấm tròn không gân theo các quy luật phân bố GPL khác nhau. Phân tích bao gồm cả tải tới hạn tĩnh và động, với trường hợp tải nhiệt động được phân tích ở hai tốc độ đặt tải nhiệt khác nhau là 100 K/s và 200 K/s. Trong trường hợp tải nhiệt tĩnh, nhiệt độ tới hạn tương đối gần nhau với tất cả các quy luật phân bố GPL, trong khoảng từ 95,53 K (U/PC/U) đến 97,05 K (V/PC/A), cho thấy những thay đổi nhỏ do các quy luật phân bố khác nhau.

Bảng 2.3. Tải tới hạn nhiệt động ΔT_{cr} (K) của tấm tròn không gân FG-GPLRC ($h = 0.02\text{m}$, $a_{ou} = 100h$, $h_{cc} = 0.5h$, $\lambda = 0$, $e_c = 0.3$, $\Lambda_{GPL} = 0.5\%$, $q = 0 \text{ N/m}^2$, $K_{1l} = 10 \text{ MN/m}^3$, $K_{2l} = 0.1 \text{ MN/m}$, $\kappa = 0 \text{ kN.s/m}^3$)

Quy luật phân bố GPL	Động		Tĩnh
	$\eta = 200 \text{ (K/s)}$	$\eta = 100 \text{ (K/s)}$	
X/PC/X	126.60	114.70	96.80
O/PC/O	126.40	114.40	96.75
U/PC/U	125.80	113.90	95.53
A/PC/V	125.56	113.70	96.49
V/PC/A	128.20	116.10	97.05

Đối với trường tải hợp tải nhiệt động, nhiệt độ tới hạn động tăng khi tốc độ đặt tải tăng, thể hiện tác động của tốc độ đặt tải nhiệt đến ứng xử mất ổn định. Hiện tượng này cho thấy phân bố GPL và tốc độ đặt tải nhiệt tác động đáng kể đến tải mất ổn định nhiệt tới hạn. Ngoài ra, tải trọng mất ổn định nhiệt tới hạn tối thiểu đã được quan sát thấy trong các trường hợp tĩnh và động với các quy luật phân bố GPL khác nhau, U/PC/U với trường hợp tĩnh và A/PC/V trong trường hợp động.



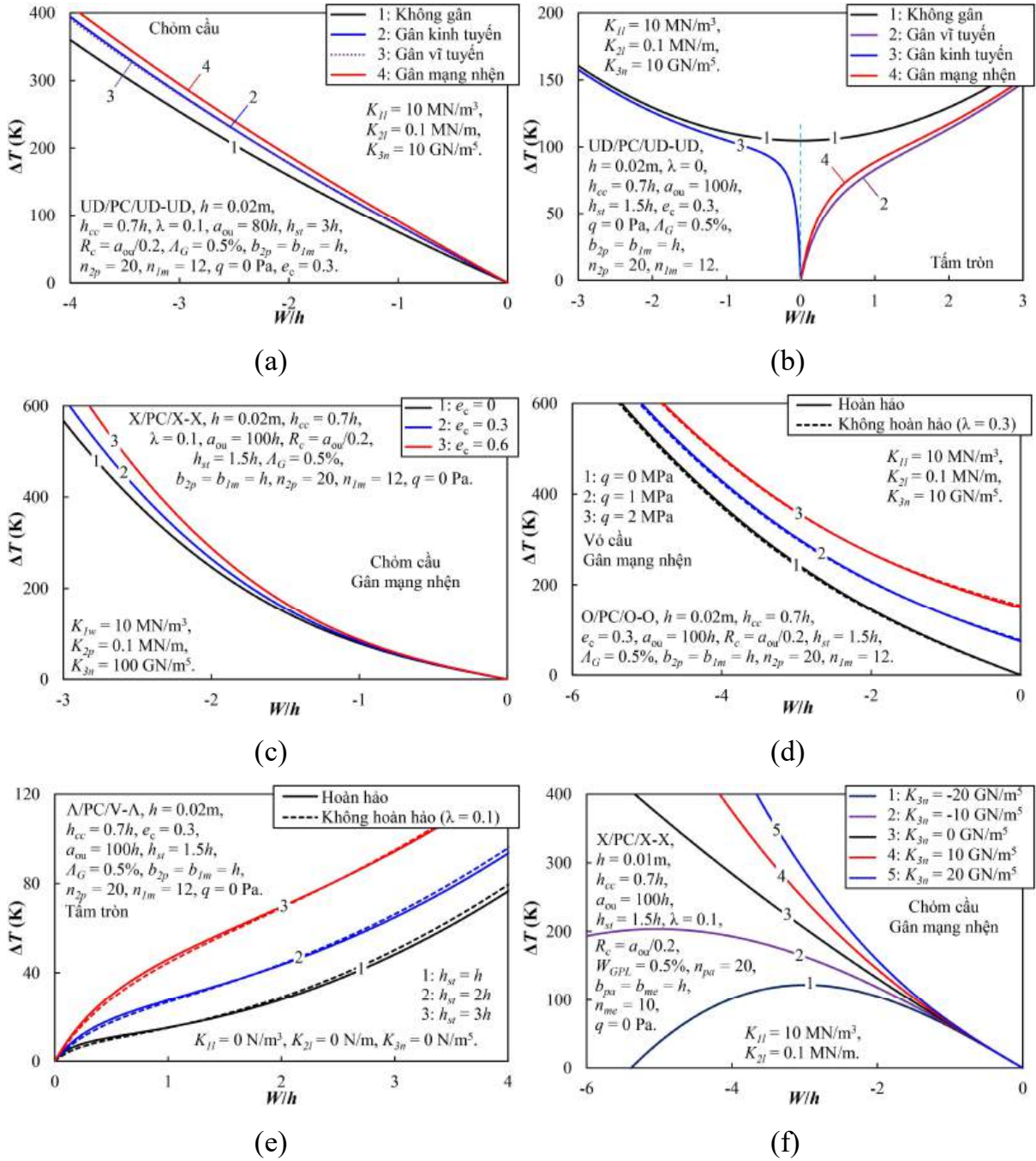
Hình 2.15. Đường cong sau mất ổn định tĩnh của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gắn mạng nhện ba vùng chịu tải trọng cơ

Hình 2.15 khảo sát ứng xử cơ học tĩnh sau mất ổn định của chòm cầu / tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng có gắn mạng nhện ba vùng trong các điều kiện khác nhau. Trong Hình 2.15a, ảnh hưởng của các loại gân khác nhau (không gân, gân vĩ tuyến, gân kinh tuyến và gân mạng nhện) đối với đáp ứng sau mất ổn định được trình bày. Các gân mạng nhện cho thấy khả năng chịu tải sau mất ổn định cao nhất, trong khi các chòm cầu không gân cho thấy khả năng chịu tải sau mất ổn định thấp nhất. Nói cách khác, các gân đóng

vai trò quan trọng trong việc cải thiện sự ổn định của kết cấu. Các gân kinh tuyến cũng cho thấy các ảnh hưởng có lợi vượt trội so với các gân vĩ tuyến. Hình 2.15b nghiên cứu ảnh hưởng của số lượng các gân. Có thể thấy rằng việc tăng số lượng các gân làm tăng khả năng chịu tải sau mất ổn định, được chứng minh bằng các đường cong sau mất ổn định cao hơn đối với các chòm cầu có nhiều gân hơn. Trong khi đó, cường độ snap-through thay đổi không đáng kể khi số lượng gân tăng lên. Trong Hình 2.15c, ảnh hưởng của các quy luật phân bố GPL được nghiên cứu. Các quy luật phân bố khác nhau tác động đến độ cứng và ứng xử sau mất ổn định. Các đường cong chỉ ra rằng một số quy luật phân bố GPL (đặc biệt là A/PC/V-A) cho hiệu quả gia cường vượt trội so với các quy luật phân bố khác, từ đó cho thấy việc lựa chọn quy luật phân bố vật liệu trong kết cấu là rất quan trọng để có hiệu suất cơ học tốt hơn. Các ảnh hưởng của các tỷ phần khối lượng GPL khác nhau đối với ứng xử sau mất ổn định được thể hiện trong Hình 2.15d. Như mong đợi, việc tăng tỷ phần khối lượng GPL sẽ dẫn đến các đường cong sau mất ổn định cao hơn. Tác động của hệ số rỗng của lõi rỗng tới đáp ứng sau mất ổn định của chòm cầu được kiểm tra trong Hình 2.15e. Hệ số rỗng cao hơn, biểu thị nhiều lỗ rỗng hơn trong vật liệu, dẫn đến giảm cường độ sau mất ổn định. Tuy nhiên, hệ số rỗng tăng làm giảm cường độ snap-through của chòm cầu. Hình 2.15f khảo sát tác động của bán kính cong tới ứng xử sau mất ổn định của chòm cầu. Rõ ràng là bán kính nhỏ hơn (tức là độ cong lớn hơn) làm tăng độ cứng và tăng khả năng chịu tải sau mất ổn định, trong khi chòm cầu thoải hơn (bán kính lớn hơn) thể hiện khả năng chịu tải sau mất ổn định yếu hơn. Từ đó thấy được vai trò quan trọng của các thông số hình học trong việc xác định ứng xử cơ học của chòm cầu. Ứng xử phi tuyến phức tạp cũng quan sát thấy tại vùng độ võng lớn, khả năng chịu tải sau mất ổn định của tấm vượt qua chòm cầu.

Hình 2.16 nghiên cứu ứng xử sau mất ổn định nhiệt tĩnh của chòm cầu / tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện ba vùng, làm nổi bật tác động của nhiều thông số khác nhau như loại gân, hệ số rỗng, áp lực ngoài trước, chiều cao gân và độ cứng nền phi tuyến. Hình 2.16a chứng minh rằng, trong số các mô hình gân khác nhau (không gân, gân kinh tuyến, gân vĩ tuyến và gân mạng nhện), hệ gân mạng nhện thể hiện khả năng chịu tải sau mất ổn định nhiệt tốt nhất, tương ứng đường cong sau mất ổn định nhiệt cao nhất. Từ Hình 2.16b có thể thấy các xu hướng hoàn toàn khác nhau của các đường cong sau mất ổn định được ghi nhận với các trường hợp tấm không gân, gân kinh

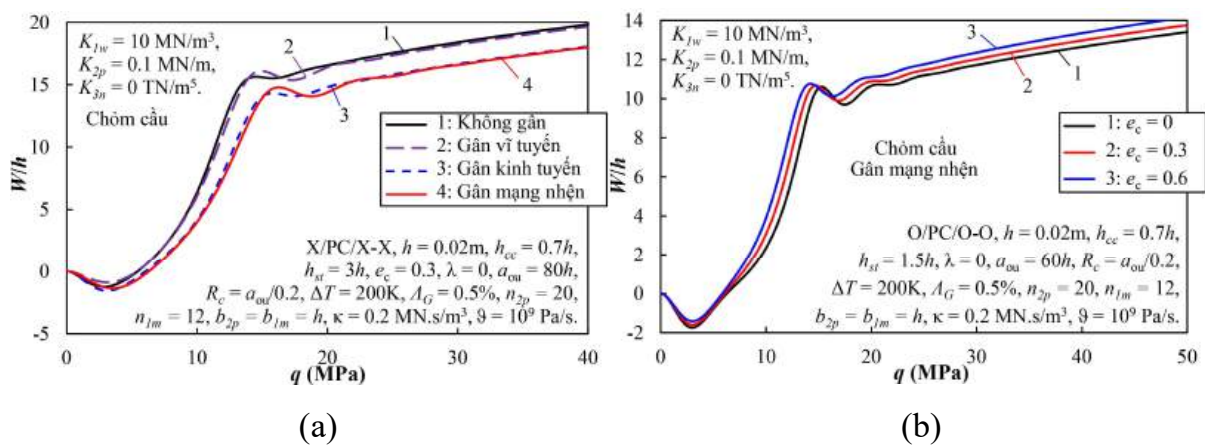
tuyến, gân vĩ tuyến và gân mạng nhện. Hiện tượng mất ổn định rẽ nhánh chỉ xuất hiện trong trường hợp tấm không gân. Hơn nữa, lợi thế của tấm có gân được thể hiện rõ ràng ở vùng độ võng lớn.



Hình 2.16. Đường cong sau mất ổn định tĩnh của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện ba vùng chịu tải trọng nhiệt

Hình 2.16c khảo sát tác động của hệ số rỗng lên chòm cầu, cho thấy độ rỗng tăng dẫn đến khả năng chịu tải nhiệt tăng, làm cho đường cong nhiệt sau mất ổn định cao hơn. Mặc dù chòm cầu trở nên rỗng hơn, dẫn đến độ cứng giảm. Tuy nhiên, hệ số giãn

nở nhiệt cũng giảm. Trong trường hợp này, ảnh hưởng chủ đạo của hệ số giãn nở nhiệt được nêu bật. Ảnh hưởng của áp lực ngoài trước được mô tả trong Hình 2.16d, rõ ràng rằng khi áp lực ngoài tăng, khả năng chịu tải sau mất ổn định nhiệt tăng đáng kể. Điều này cho thấy, áp lực ngoài làm tăng ứng suất nén của chòm cầu, qua đó chống lại sự giãn nở nhiệt một cách rõ ràng. Hình 2.16e nghiên cứu ảnh hưởng của chiều cao gân lên tấm tròn, cho thấy gân cao hơn làm tăng khả năng chịu tải sau mất ổn định nhiệt của kết cấu. Hình 2.16f kiểm tra tác động của độ cứng nền phi tuyến lên khả năng chịu tải sau mất ổn định của chòm cầu. Kết quả cho thấy rằng việc tăng độ cứng nền phi tuyến sẽ cải thiện khả năng chịu tải sau mất ổn định nhiệt của nền hóa cứng (K_{3n} dương) và cho thấy khả năng chống chịu lớn hơn so với nền hóa mềm (K_{3n} âm).



Hình 2.17. Đáp ứng mất ổn định động của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân ba vùng chịu tải cơ

Tác động của các điều kiện khác nhau của các loại gân, hệ số rỗng và độ cứng của nền phi tuyến đến đáp ứng mất ổn định động của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện ba vùng chịu tải cơ được trình bày trong Hình 2.17. Trong Hình 2.17a, tác động của các loại gân khác nhau lên chòm cầu được phân tích. Khảo sát cho thấy gân mạng nhện cho hiệu quả vượt trội khi chịu tải động, được chỉ ra bởi đường cong đáp ứng tải trọng-độ võng thấp hơn ở trạng thái sau mất ổn định. Sự khác biệt nhỏ giữa các đường cong đáp ứng động đối với trường hợp chòm cầu không gân và gân vĩ tuyến và của chòm cầu gân kinh tuyến và gân mạng nhện cho thấy tác động của gân vĩ tuyến là tương đối nhỏ. Hình 2.17b tập trung vào tác động của hệ số rỗng đến đáp ứng mất ổn định động của chòm cầu. Có thể thấy độ rỗng cao hơn làm giảm khả năng chịu tải sau mất ổn định động, vì các giá trị cao hơn tương ứng với độ võng tăng khi áp lực ngoài

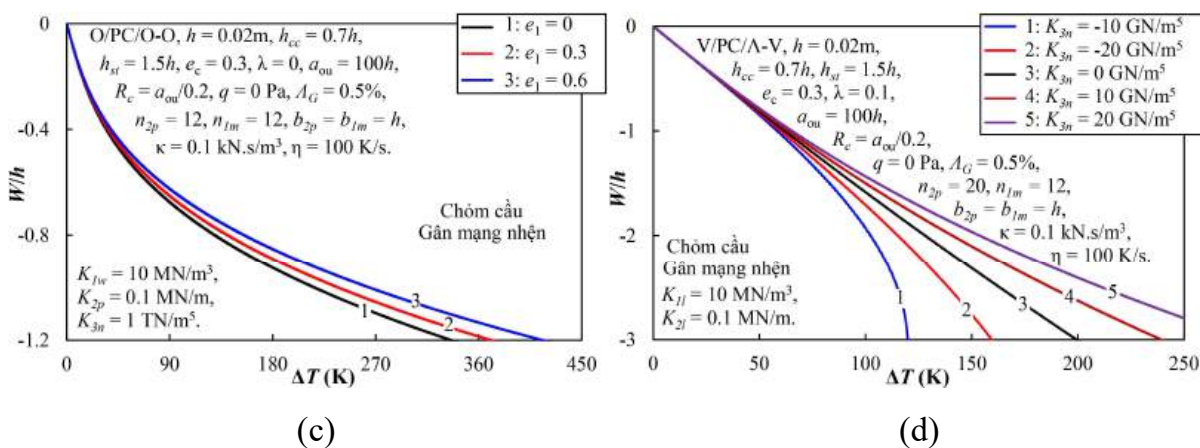
Figure 10 consists of two graphs, (a) and (b), showing the normalized deflection W/h versus the temperature change ΔT (K).

Graph (a) is for a simply supported beam (UD/PC/UD-UD). The y-axis ranges from 0 to -3, and the x-axis ranges from 0 to 420 K. The legend indicates four cases: 1: Không gán (No constraints), 2: Gán kinh tuyến (Fixed longitudinal), 3: Gán vĩ tuyến (Fixed latitude), and 4: Gán mạng nhện (Fixed spider network). The graph shows that the deflection increases with temperature change, and the fixed-fixed beam (case 4) has the highest deflection, while the simply supported beam (case 1) has the lowest deflection.

Graph (b) is for a fixed-fixed beam (X/PC/X-X). The y-axis ranges from 0 to -0.4, and the x-axis ranges from 0 to 250 K. The legend indicates the same four cases as in graph (a). The graph shows that the deflection increases with temperature change, and the fixed-fixed beam (case 4) has the highest deflection, while the simply supported beam (case 1) has the lowest deflection.

Both graphs include the following parameters:

- $h = 0.02\text{m}$, $h_{cc} = 0.7h$, $h_{st} = 3h$, $e_c = 0.3$, $\lambda = 0.1$, $a_{ou} = 60h$, $R_c = a_{ou}/0.2$, $q = 0\text{ Pa}$, $A_G = 0.5\%$, $n_{2p} = 12$, $n_{1m} = 12$, $b_{2p} = b_{1m} = h$, $\kappa = 0.1\text{ kN.s/m}^3$, $\eta = 100\text{ K/s}$.



Hình 2.18. Đáp ứng mất ổn định động của tấm tròn và chỏm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân ba vùng chịu tải nhiệt

Hình 2.18 minh họa đáp ứng động của chòm cầu và tấm tròn FG-PLRC lõi rỗng chịu tải nhiệt với các gân mạng nhện trong nhiều điều kiện khác nhau, bao gồm các loại gân, hệ số rỗng và độ cứng nền phi tuyến. Trong Hình 2.18a, tác động của các loại gân khác nhau lên chòm cầu chịu tải trọng nhiệt được kiểm tra. Các gân mạng nhện cho thấy lợi thế rõ ràng so với các gân kinh tuyến và vĩ tuyến, vì chúng duy trì độ võng thấp hơn khi nhiệt độ tăng. Đối với tấm tròn trong Hình 2.18b, xu hướng của các đường cong nhiệt động trở nên phức tạp hơn đáng kể, trong khi sự khác biệt đặc biệt lớn trong các trường hợp không gân, gân kinh tuyến, gân vĩ tuyến và gân mạng nhện. Có thể quan sát thấy độ võng dương và âm trong các trường hợp được xem xét. Ảnh hưởng của hệ số rỗng đến đáp ứng động của chòm cầu có gân mạng nhện chịu tải nhiệt có thể thấy như trong Hình 2.18c. Tương tự tải trọng nhiệt tĩnh, khi độ rỗng tăng, khả năng chịu tải giảm, dẫn đến độ võng cao hơn với cùng giá trị tải nhiệt. Hình 2.18d kiểm tra tác động của độ

cứng phi tuyến của nền đến đáp ứng nhiệt động của chỏm cầu. Khi độ cứng nền phi tuyến tăng, khả năng chịu tải nhiệt động được cải thiện.

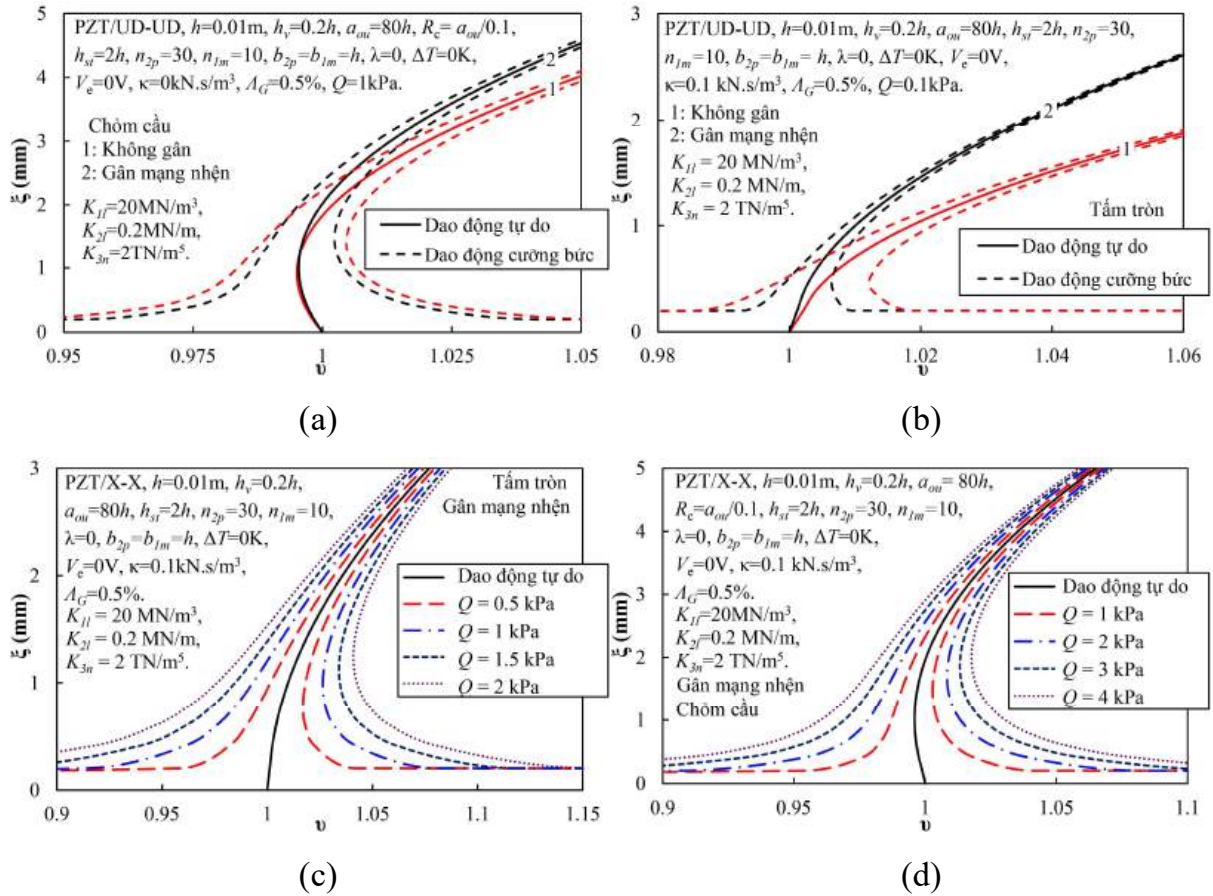
2.3.5. Bài toán 4: Dao động phi tuyến của chỏm cầu và tấm tròn FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng

Các đặc trưng hình học và vật liệu của tấm tròn và chỏm cầu thoả của bài toán này được chọn tương tự với bài toán 2.

Bảng 2.4. Tần số dao động tự nhiên (rad/s) của tấm tròn và chỏm cầu với các quy luật phân bố và tỷ phần khối lượng GPL khác nhau ($h_{2p} = 0.2h$, $h = 0.01\text{m}$, $R_c = a_{ou}/0.02$, $a_{ou} = 80h$, $n_{2p} = 20$, $n_{1m} = 10$, $h_{st} = 2h$, $\lambda = 0$, $b_{2p} = b_{1m} = h$, $\Delta T = 0\text{K}$, $\Lambda_G = 0.5\%$, $K_{1l} = 0 \text{ N/m}^3$, $K_{2l} = 0 \text{ N/m}$, $V_e = 500\text{V}$)

		PZT/X-X	PZT/UD-UD	PZT/O-O	PZT/ Λ -V	PZT/V- Λ
Chỏm cầu	Gân mạng nhện	389.51	385.41	380.15	368.53	400.34
	Gân kinh tuyến	363.53	359.52	354.42	347.95	369.21
	Gân vĩ tuyến	339.52	335.37	330.19	321.98	347.03
	Không gân	241.17	236.28	230.59	237.77	232.65
Tấm tròn	Gân mạng nhện	382.27	378.06	372.72	359.86	394.23
	Gân kinh tuyến	327.15	322.56	316.99	310.09	333.12
	Gân vĩ tuyến	338.34	334.16	328.98	319.03	347.44
	Không gân	188.55	182.07	174.81	183.95	177.75

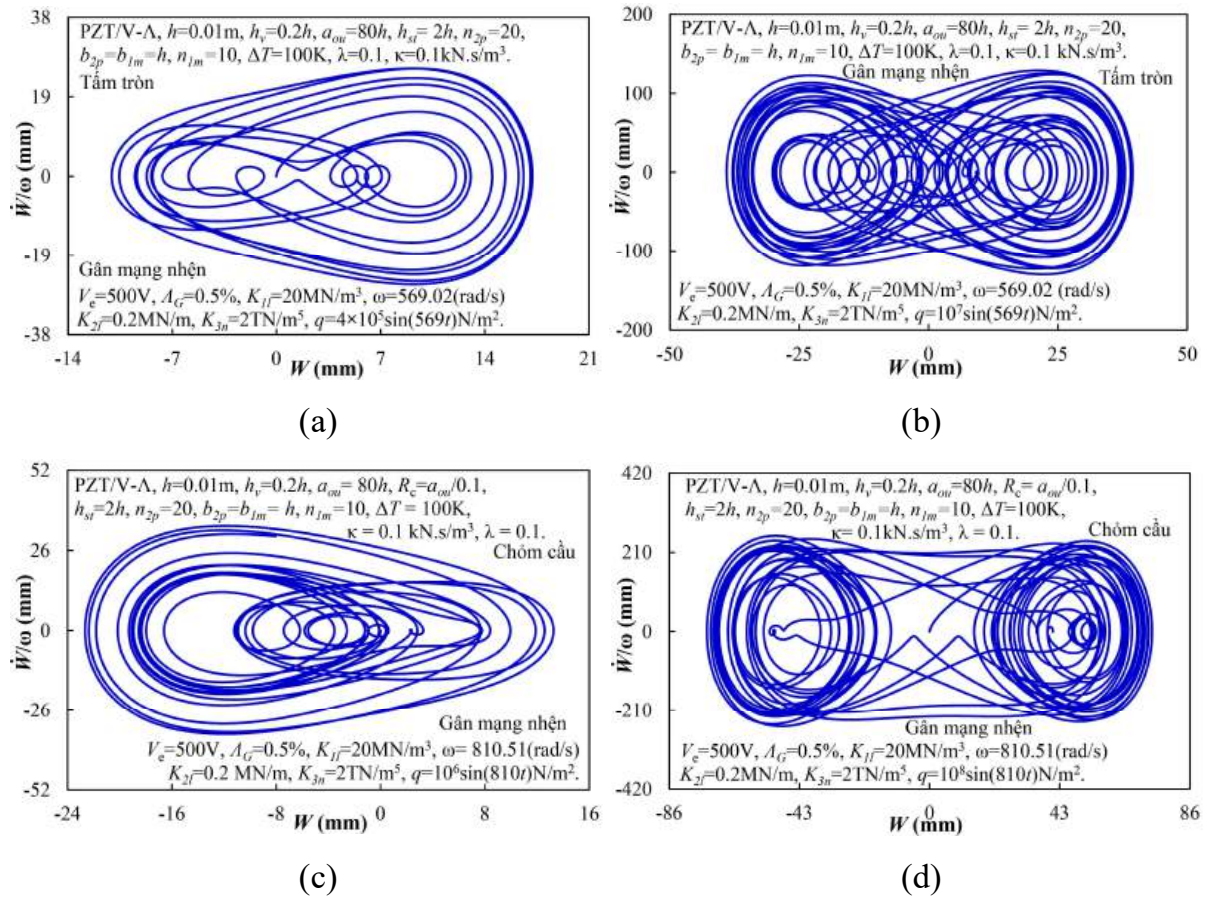
Ảnh hưởng của các loại gân và quy luật phân bố GPL tới tần số dao động tự nhiên của chỏm cầu/tấm tròn FG-GPLRC không gân, có gân mạng nhện ba vùng với các lớp áp điện được nghiên cứu trong Bảng 2.4. Như có thể thấy, chỉ với độ cong thoả, tần số dao động tự nhiên của chỏm cầu lớn hơn đáng kể so với tần số của tấm tròn tương ứng. Trong cả hai trường hợp của tấm tròn và chỏm cầu không gân, có thể quan sát thấy tần số dao động tự nhiên lớn nhất với quy luật phân bố PZT/X-X. Tuy nhiên, đối với các tấm và vỏ có gân, quy luật phân bố GPL trong chỏm cầu/tấm tròn và gân ảnh hưởng mạnh đến tần số dao động tự nhiên, có thể quan sát thấy một lợi thế rõ ràng của quy luật phân bố PZT/V-A. Mặc dù việc bổ sung gân làm tăng đáng kể mật độ, nhưng sự gia tăng độ cứng tổng thể có ưu thế vượt trội so với sự gia tăng mật độ của kết cấu dẫn đến tần số dao động tự nhiên tăng lên.



Hình 2.19. Đường cong đáp ứng biên độ tần số của dao động tự do và cưỡng bức đối với tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng

Hình 2.19 minh họa các đường cong đáp ứng biên độ-tần số phi tuyến của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng, trong trường hợp dao động tự do và cưỡng bức. Từ hình này, rõ ràng là gân mạng nhện giúp cải thiện độ cứng của kết cấu, làm cho các đường cong biên độ-tần số cao hơn so với các kết cấu không gân. Trong cả trường hợp tấm tròn (Hình 2.19b và 2.19c) và chòm cầu (Hình 2.19a và 2.19d), các kết cấu có gân biểu hiện ít nhạy cảm hơn với tải trọng kích thích và duy trì tần số dao động ổn định hơn khi biên độ tăng. Các đường cong dao động tự do cho thấy tác động lớn của gân mạng nhện đặc biệt ở vùng tần số cao. Đối với dao động cưỡng bức, các kết cấu có gân tiếp tục thể hiện ưu thế rõ rệt, với cùng biên độ dao động và tần số dao động của các kết cấu có gân nhỏ hơn đáng kể so với các kết cấu không gân. Ngoài ra, các đường cong trong Hình 2.19c và 2.19d, với các tải trọng kích thích khác nhau, cho thấy rõ tác động của biên độ tải cưỡng bức tới ứng xử dao động phi tuyến, với các trường hợp biên độ tải cưỡng bức cao hơn thể hiện sự thay đổi biên độ-tần số rõ rệt hơn so với trường hợp dao động tự do.

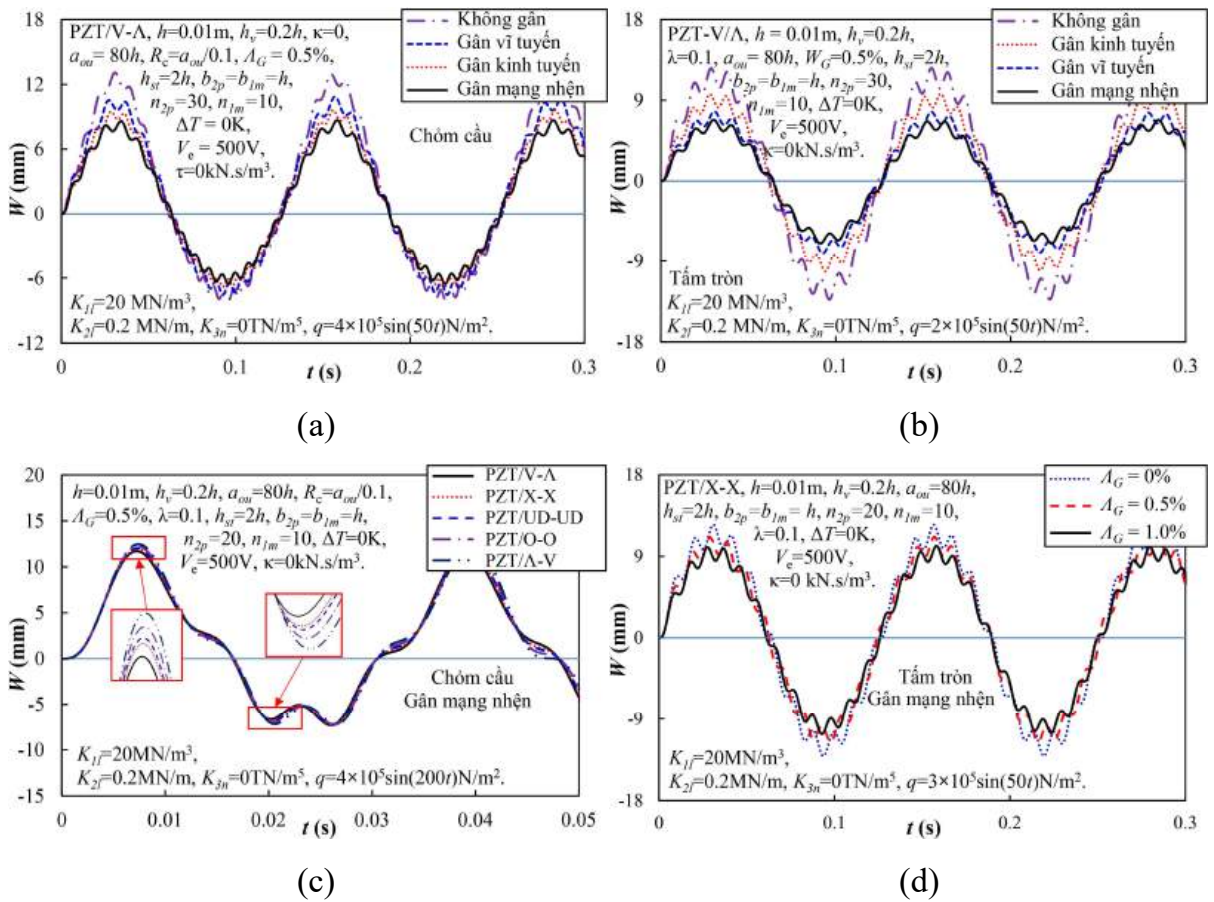
Hình 2.20 trình bày các đường cong mặt phẳng pha biên độ-vận tốc của tấm tròn và chỏm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng trong các điều kiện dao động cụ thể. Hình 2.20a và 2.20b khảo sát tấm tròn, trong khi Hình 2.20c và 2.20d khảo sát chỏm cầu, có gân mạng nhện ba vùng. Có thể quan sát thấy các quỹ đạo dao động có dạng tương tự trong cả hai trường hợp tấm và vòm được nghiên cứu. Có thể thấy, khi tần số cưỡng bức tăng lên, kích thước của mặt phẳng pha tăng lên đáng kể, mặt phẳng pha có xu hướng tách thành hai vùng riêng biệt và quỹ đạo dao động trở nên phức tạp hơn đáng kể.



Hình 2.20. Đường cong mặt phẳng pha biên độ-vận tốc của tấm tròn và chỏm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng

Hình 2.21 minh họa các đường cong biên độ thời gian của tấm tròn và chỏm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng với nhiều loại gân và thông số vật liệu khác nhau. Trong Hình 2.21a và 2.21b, các loại gân khác nhau cho chỏm cầu và tấm tròn, bao gồm gân mạng nhện, gân vĩ tuyến và kinh tuyến, được so sánh. Cả hai hình đều cho thấy gân mạng nhện có biên độ dao động nhỏ nhất so với các loại gân khác, cho thấy độ cứng kết cấu được cải thiện đáng kể. Đối với tấm tròn trong Hình 2.21b, các tấm không gân

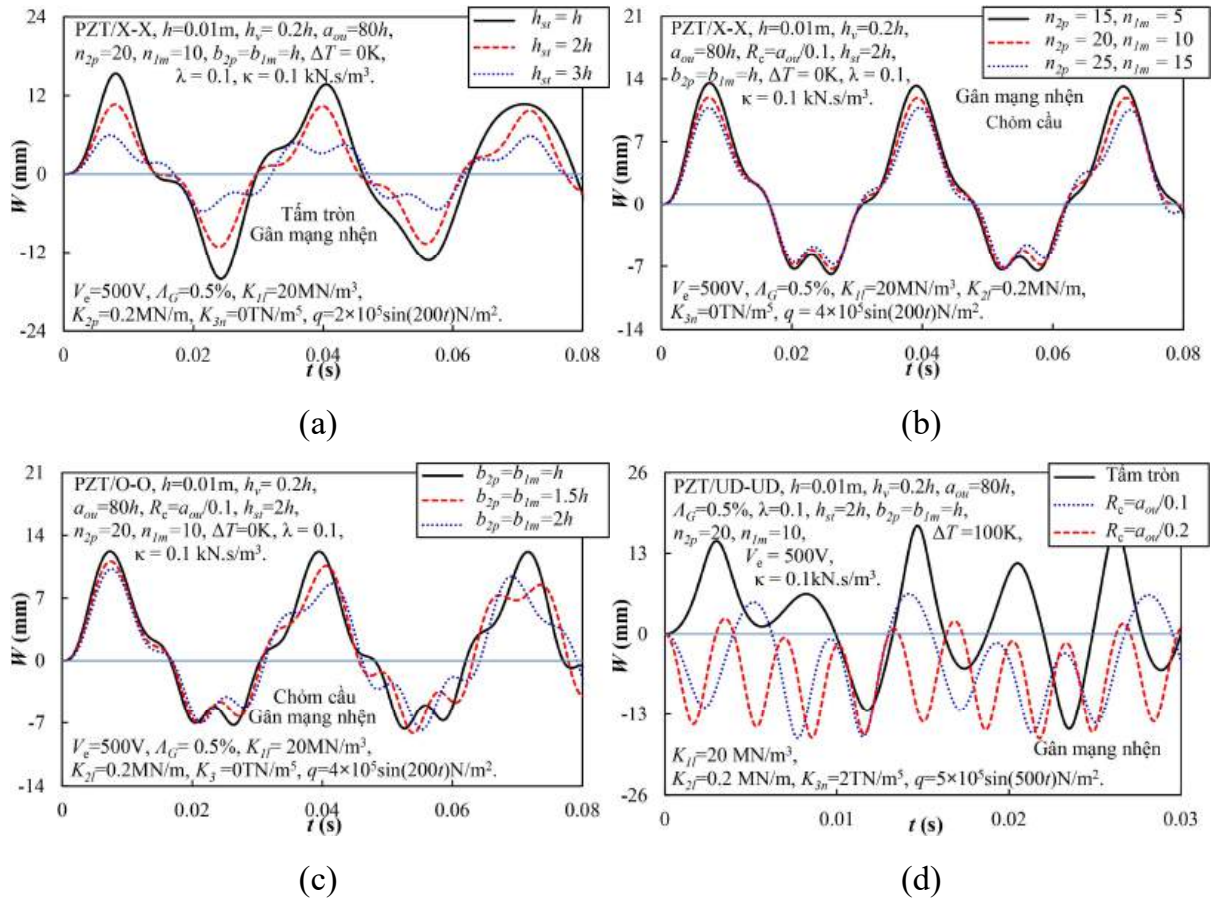
có biên độ lớn nhất, cho thấy vai trò quan trọng của gân trong việc giảm độ võng. Hình 2.2c khảo sát tác động của các quy luật phân bố GPL khác nhau đến ứng xử dao động của chòm cầu có gân mạng nhện. Rõ ràng là quy luật phân bố GPL ảnh hưởng nhẹ đến đáp ứng dao động. Quy luật phân bố PZT/V-A cho thấy lợi thế trong việc giảm biên độ dao động, tuy nhiên chỉ có thể quan sát thấy một lợi thế nhỏ trong trường hợp này. Cuối cùng, Hình 2.21d khảo sát tác động của các tỷ phần khối lượng GPL khác nhau lên ứng xử dao động của tấm tròn có gân mạng nhện. Khi tỷ phần khối lượng GPL tăng từ 0% đến 1%, biên độ dao động giảm rõ rệt, cho thấy tỷ phần khối lượng GPL cao hơn góp phần làm tăng độ cứng và giảm độ võng.



Hình 2.21. Đường cong biên độ - thời gian của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC với các loại gân và thông số vật liệu khác nhau

Hình 2.22 trình bày các đường cong biên độ - thời gian của tấm tròn và chòm cầu FG-CPLRC có gân mạng nhện ba vùng, với các thông số hình học khác nhau. Hình này khảo sát ảnh hưởng của chiều cao gân (Hình 2.22a), số lượng gân (Hình 2.22b), chiều rộng gân (Hình 2.22c) và bán kính của chòm cầu (Hình 2.22f). Rõ ràng là gân mạng nhện có tác động đáng kể đến ứng xử dao động, với các thông số hình học khác nhau.

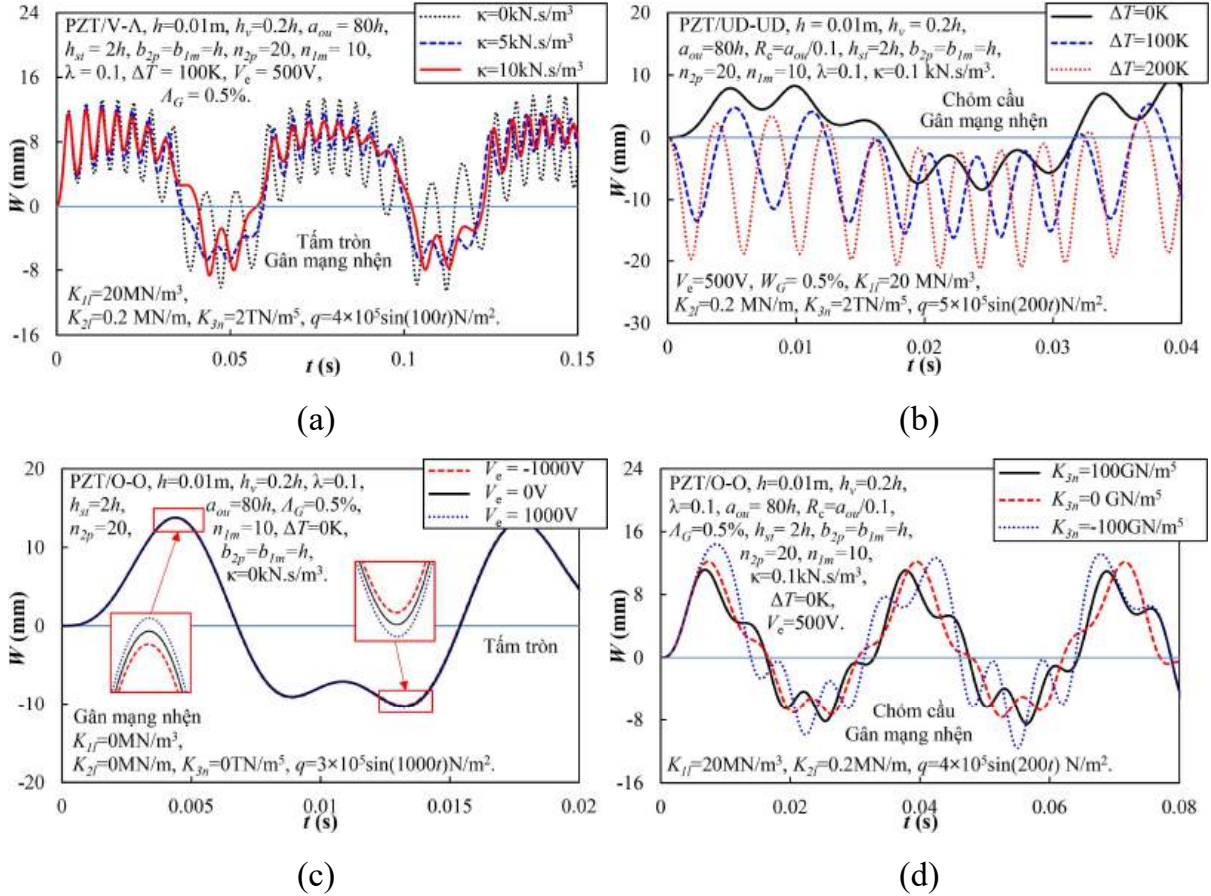
Ví dụ, việc tăng số lượng gân (Hình 2.22b) hoặc tăng chiều rộng gân (Hình 2.22c) dẫn đến giảm biên độ dao động, trong khi thay đổi chiều cao gân (Hình 2.22a) hoặc thay đổi bán kính cong của chòm cầu ảnh hưởng đến cả biên độ dao động và hình dạng của các đường cong đáp ứng biên độ - thời gian. Người ta cũng có thể thấy trong Hình 2.22d rằng trong khi đường cong biên độ - thời gian dao động quanh vị trí cân bằng đối với tấm tròn, thì nó chủ yếu dao động trong vùng độ võng âm đối với chòm cầu.



Hình 2.22. Đường cong biên độ - thời gian của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng với các thông số hình học khác nhau

Hình 2.23 trình bày các đường cong biên độ - thời gian của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện ba vùng với các hệ số cản, nhiệt độ, điện áp của lớp áp điện và các độ cứng nền phi tuyến khác nhau. Trong Hình 2.23a, các hệ số cản khác nhau (0, 5 và 10 kN·s/m³) được áp dụng cho tấm tròn. Khi hệ số cản tăng, biên độ dao động giảm, cho thấy vai trò quan trọng của hệ số trong ứng xử dao động của kết cấu. Hình 2.23b kiểm tra tác động của các nhiệt độ khác nhau tới chòm cầu có gân mạng nhện. Khi nhiệt độ tăng từ 0K đến 200K, biên độ dao động tăng, cho thấy sự giãn nở nhiệt làm tăng đáp ứng động của các kết cấu. Trong Hình 2.23c, tác động của các điện

áp khác nhau trong lớp áp điện được khảo sát. Điện áp dương và âm làm thay đổi ứng xử dao động của tấm tròn, với độ võng lớn hơn quan sát được trong các trường hợp điện áp dương. Hình 2.23d thể hiện tác động của các độ cứng nền phi tuyến khác nhau lên ứng xử dao động của chỏm cầu. Độ cứng nền phi tuyến dương làm giảm độ võng, trong khi giá trị âm của độ cứng phi tuyến dẫn đến biên độ dao động lớn hơn.



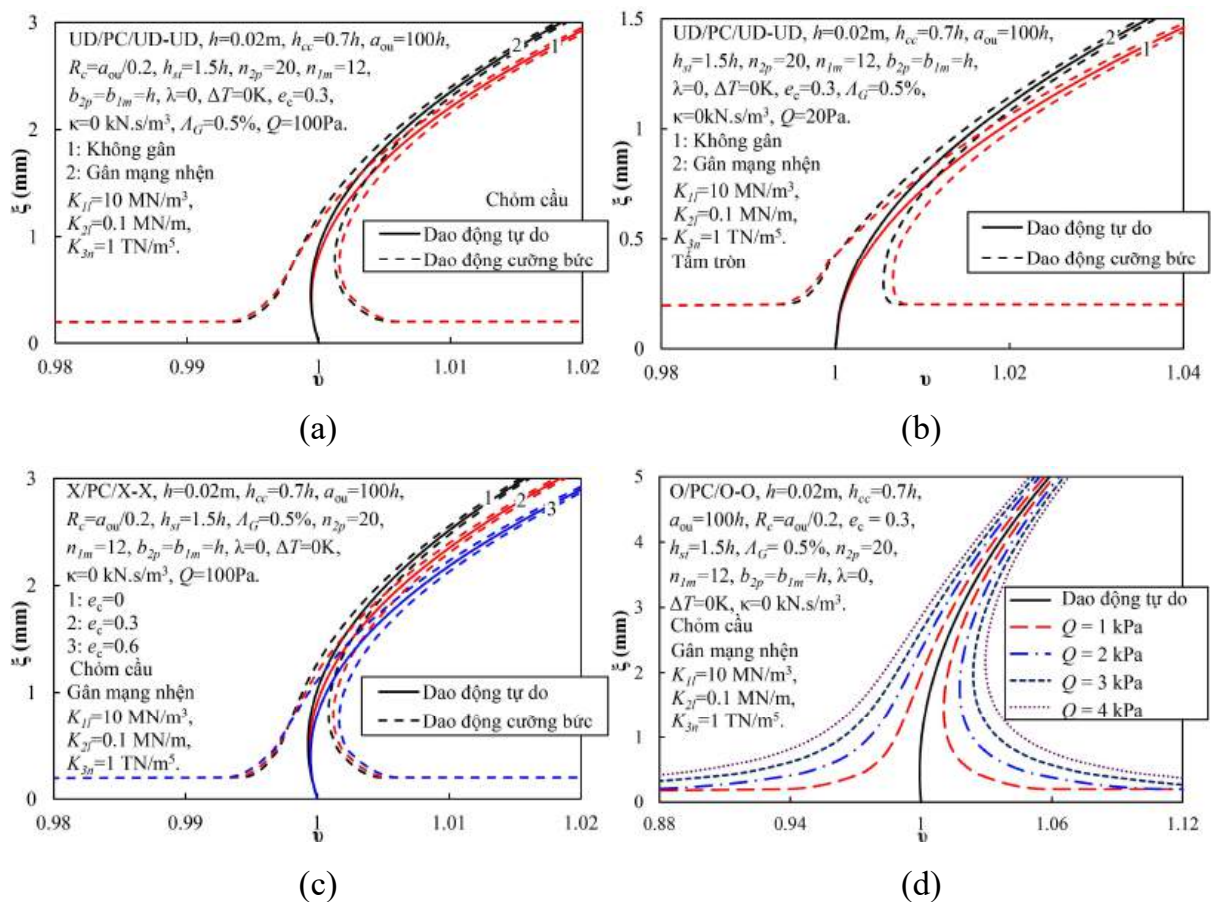
Hình 2.23. Đường cong biên độ - thời gian của tấm tròn và chỏm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện với các hệ số cản, nhiệt độ, điện áp và độ cứng nền khác nhau

2.3.6. Bài toán 5: Dao động phi tuyến của tấm tròn và chỏm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện ba vùng

Các đặc trưng hình học và vật liệu của tấm tròn và chỏm cầu thoải của bài toán này được chọn tương tự với bài toán 3.

Hình 2.24 trình bày các đường cong tần số-biên độ cho các chỏm cầu và các tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện trong các điều kiện khác nhau. Hình 2.24a cho thấy ứng xử của các chỏm cầu không gân và có gân mạng nhện dưới các dao động tự do và cưỡng bức. Các gân mạng nhện có tác động đáng kể đến đáp ứng dao động, đặc biệt là tác dụng làm tăng độ cứng được phản ánh bởi tần số thấp hơn với cùng biên độ

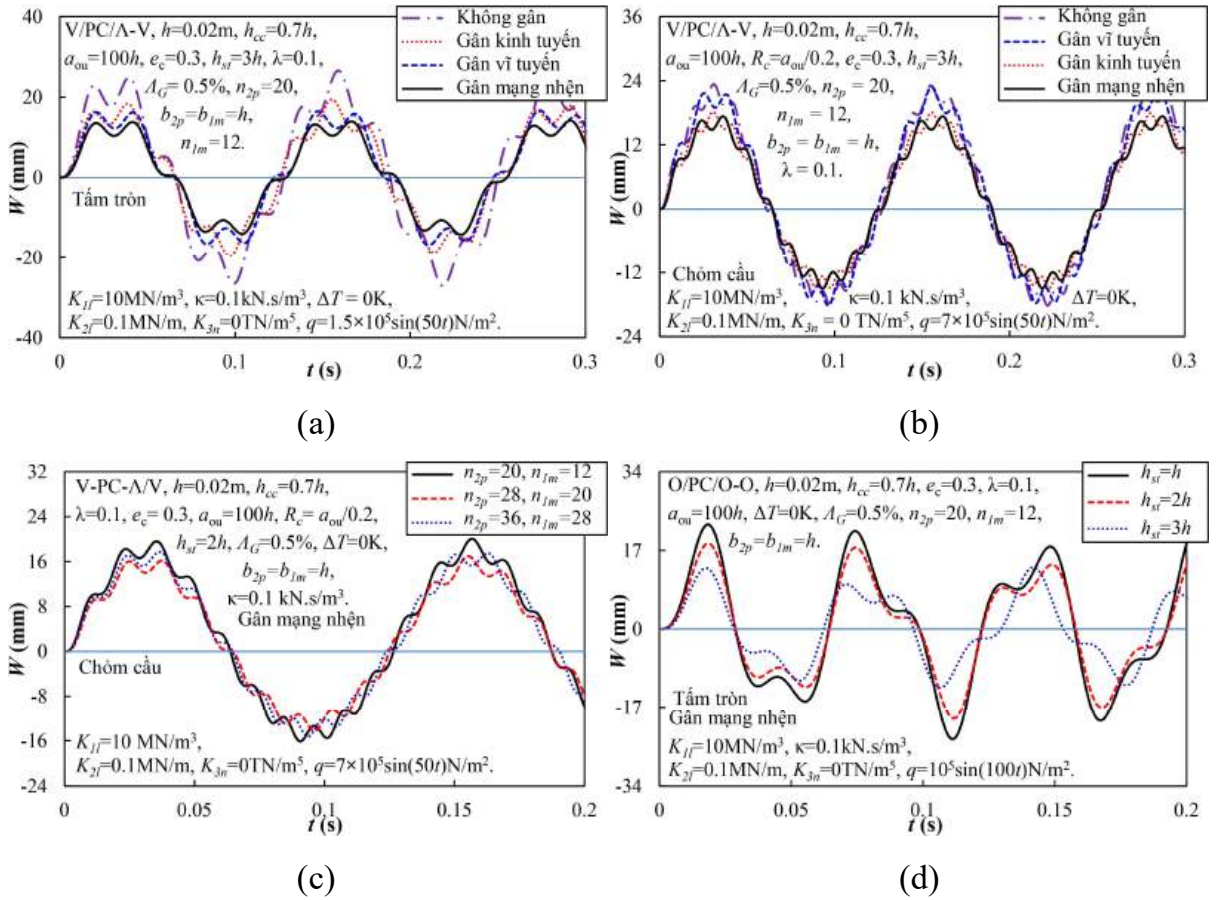
dao động so với kết cấu không gân. Hình 2.24b so sánh ứng xử dao động của các tấm tròn, một lần nữa chứng minh ảnh hưởng đáng kể của hệ gân mạng nhện. Hình 2.24c và 2.24d tiếp tục nghiên cứu các tác động của hệ số rỗng và biên độ tải cường bức. Trong Hình 2.24c, tác động của các hệ số rỗng e_c khác nhau (từ 0 đến 0.6) lên đường cong tần số-biên độ được khảo sát và cho thấy rằng với độ rỗng cao hơn làm giảm độ cứng của kết cấu, được phản ánh qua xu thế tăng của tần số khi hệ số rỗng tăng mặc dù cùng biên độ dao động. Trong Hình 2.24d, các biên độ tải cường bức khác nhau (dao động từ 1 đến 4 kPa) được áp dụng, cho thấy rằng biên độ tải cường bức cao hơn gây ra sự khác biệt rõ rệt hơn giữa dao động tự do và cường bức.



Hình 2.24. Đường cong tần số-biên độ của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện

Hình 2.25 trình bày đáp ứng dao động biên độ - thời gian của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện, với các loại, số lượng và độ cao của gân khác nhau chịu tải cường bức điều hòa. Trong Hình 2.25a, tác động của các loại gân khác nhau lên đáp ứng dao động của tấm tròn được thể hiện. Giống như trong các kết quả trước, gân mạng nhện hoạt động tốt hơn các loại khác (gân kinh tuyến và vĩ tuyến)

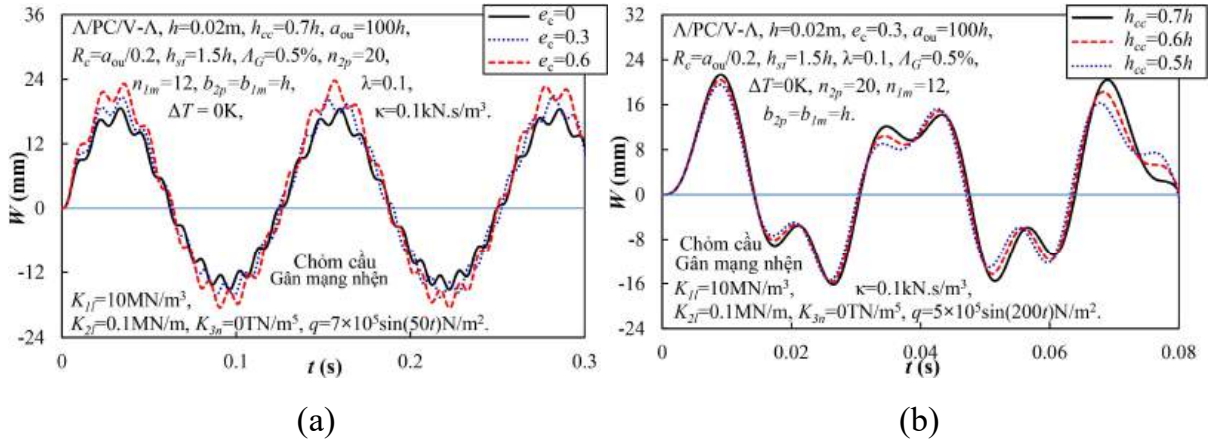
thông qua việc giảm biên độ dao động hiệu quả hơn. Kết cấu không gân có biên độ lớn nhất, chứng minh rằng việc thêm gân làm tăng đáng kể độ cứng của kết cấu, với gân mạng nhện mang lại hiệu quả lớn nhất. Hình 2.25b trình bày đáp ứng dao động của chòm cầu đối với các loại gân khác nhau. Tương tự như các tấm tròn, gân mạng nhện cung cấp khả năng giảm biên độ dao động vượt trội so với gân kinh tuyến và vĩ tuyến và các chòm cầu không gân có biên độ cao nhất. Xu hướng này phù hợp với ứng xử được thấy ở các tấm tròn, củng cố thêm hiệu quả của gân mạng nhện.



Hình 2.25. Đáp ứng dao động thời gian-biên độ của các tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện

Hình 2.25c nghiên cứu tác động của số lượng gân khác nhau đến ứng xử dao động của chòm cầu. Rõ ràng là việc tăng số lượng gân (n_{2p} từ 20 đến 36 và n_{lm} từ 12 đến 28) dẫn đến giảm biên độ dao động rõ rệt. Với $n_{2p} = 36$ và $n_{lm} = 28$ cho thấy biên độ dao động thấp nhất, cho thấy rằng số lượng gân tăng dẫn đến tăng độ cứng và giảm biên độ dao động. Hình 2.25d khảo sát tác động của các chiều cao gân khác nhau đến đáp ứng dao động của các tấm tròn. Kết quả chỉ ra rằng việc tăng chiều cao gân tăng

cứng ($h_{st} = h$ tới $3h$) làm giảm biên độ dao động tương đối rõ rệt. Trường hợp chiều cao gân cao nhất ($h_{st} = 3h$) làm giảm biên độ dao động tốt nhất cho thấy rằng các gân cao hơn làm kết cấu cứng hơn đáng kể.

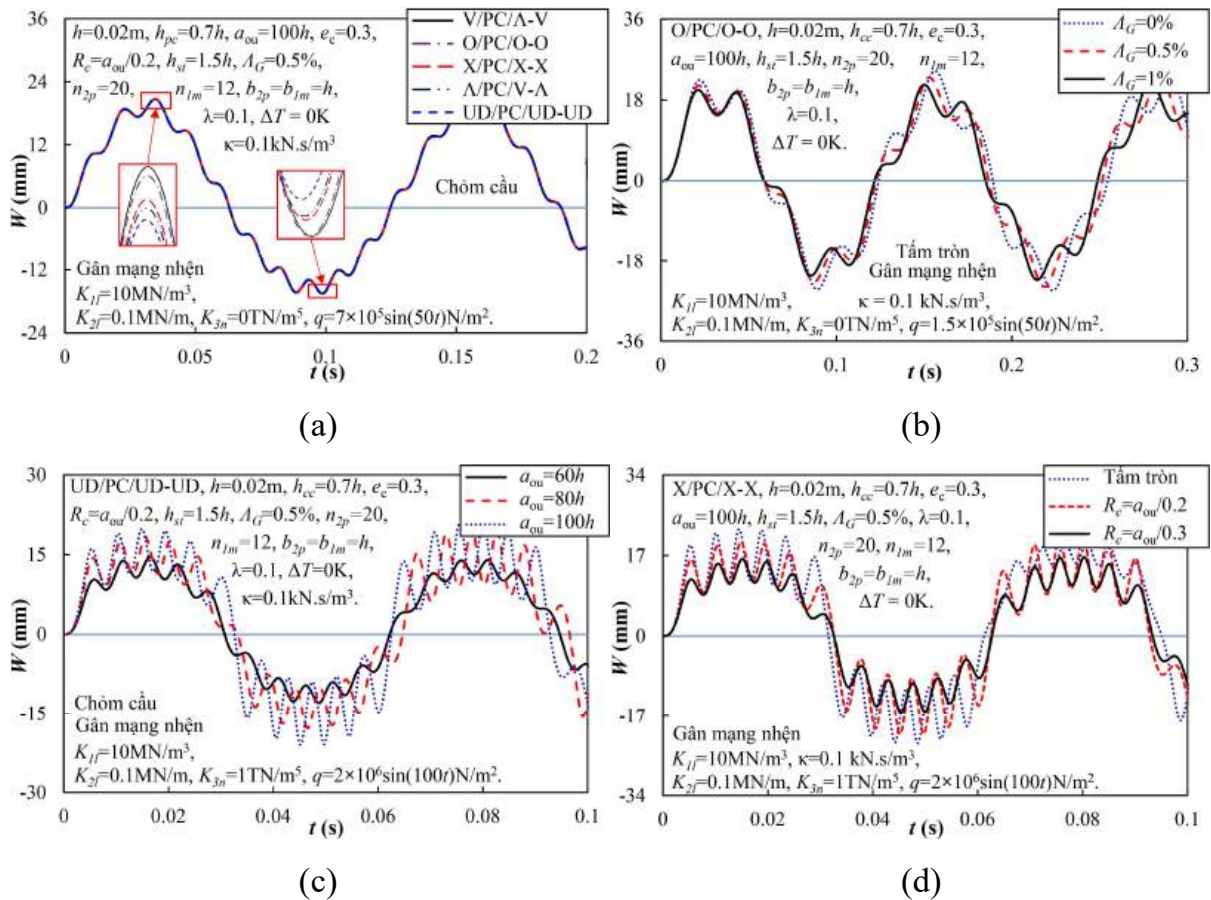


Hình 2.26. Ảnh hưởng của lõi rỗng lên đáp ứng dao động thời gian-biên độ của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện

Hình 2.26 mô tả đáp ứng dao động biên độ - thời gian của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện, xét đến các giá trị khác nhau về cả hệ số rỗng và độ dày lõi rỗng. Trong Hình 2.26a, tác động của các hệ số rỗng khác nhau của lõi rỗng ($e_c = 0, 0.3, 0.6$) tới đáp ứng dao động của chòm cầu được phân tích, khi hệ số rỗng tăng, biên độ dao động cũng tăng mạnh. Cụ thể, trường hợp $e_c = 0.6$ thể hiện biên độ cao nhất, trong khi trường hợp $e_c = 0$ thể hiện đáp ứng dao động giảm nhiều nhất. Ứng xử này cho thấy độ rỗng cao hơn dẫn đến độ cứng giảm, do đó tạo ra biên độ dao động cao hơn trong điều kiện tải trọng động. Trong Hình 2.26b, ảnh hưởng của bề dày lõi rỗng khác nhau ($h_{cc} = 0.5h, 0.6h, 0.7h$) được nghiên cứu. Rõ ràng lõi rỗng dày hơn ($h_{cc} = 0.7h$) dẫn đến biên độ dao động thấp hơn so với trường hợp lõi mỏng hơn.

Hình 2.27 khảo sát tác động của nhiều thông số hình học và vật liệu khác nhau lên đáp ứng dao động thời gian-biên độ của các chòm cầu FG-GPLRC có gân mạng nhện và các tấm tròn có lõi rỗng. Trong Hình 2.27a, ảnh hưởng của các quy luật phân bố GPL khác nhau lên đáp ứng dao động được trình bày. Có thể thấy rằng đường cong đáp ứng động của kết cấu thay đổi rất nhỏ khi thay đổi quy luật phân bố GPL. Hình 2.27b nghiên cứu tác động của các tỷ phần khối lượng GPL khác nhau lên đáp ứng dao động của tấm tròn. Sự so sánh giữa các tỷ phần khối lượng 0%, 0.5% và 1% chứng minh

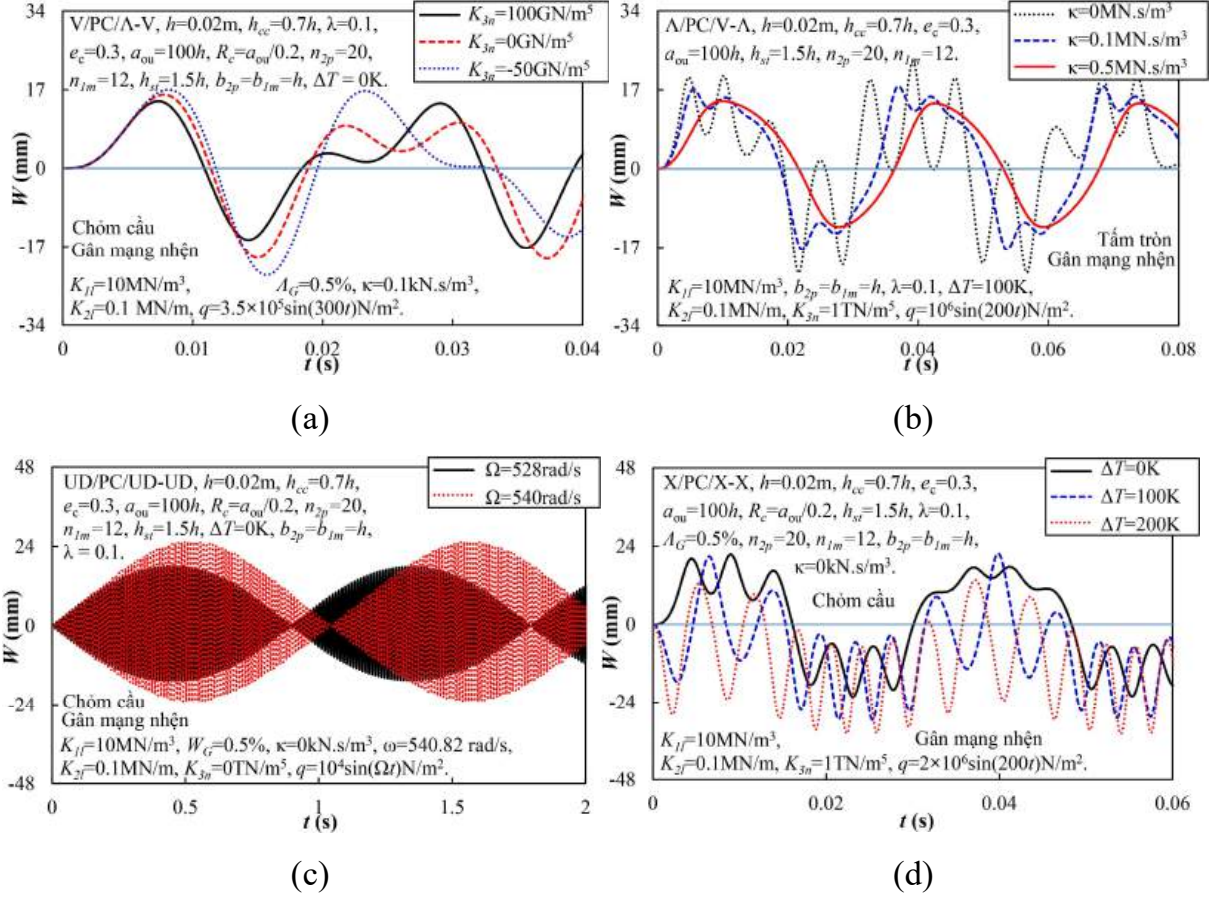
rằng việc tăng hàm lượng GPL dẫn đến giảm biên độ dao động. Hiện tượng này là do với tỷ lệ GPL cao hơn làm tăng độ cứng của vật liệu, làm giảm biến dạng của kết cấu. Trong Hình 2.27c, khi bán kính cơ sở (a_{ou}) của các chòm cầu thay đổi, làm cho ứng xử dao động của kết cấu thay đổi. Cụ thể, khi bán kính cơ sở tăng từ $60h$ đến $100h$, biên độ dao động giảm, tức là các chòm cầu lớn hơn thì cứng hơn và chống biến dạng tốt hơn. Hình 2.27d kiểm tra ảnh hưởng của bán kính cong của chòm cầu (R_c). Kết quả chỉ ra rằng bán kính cong lớn hơn dẫn tới biên độ dao động nhỏ hơn.



Hình 2.27. Ảnh hưởng của các thông số vật liệu và hình học đến đáp ứng dao động biên độ - thời gian của tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện

Hình 2.28 trình bày các đáp ứng dao động biên độ - thời gian của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện trong các điều kiện khác nhau, tập trung vào xem xét các thông số nền phi tuyến, hệ số cản, hiện tượng phách và tác động của nhiệt độ. Hình 2.28a cũng cho thấy các tác động của các độ cứng nền phi tuyến khác nhau (K_{3n}) tới đáp ứng dao động. Ba giá trị độ cứng khác nhau (100 GN/m^3 , 0 GN/m^3

và 50 GN/m^3) được so sánh. Rõ ràng là khi độ cứng nền tăng, biên độ dao động giảm, thể hiện vai trò quan trọng của độ cứng nền trong việc giảm dao động của kết cấu.



Hình 2.28. Đáp ứng dao động thời gian-biên độ của các tấm tròn và chòm cầu FG-GPLRC lõi rỗng có gân mạng nhện

Hình 2.28b khảo sát ảnh hưởng của các hệ số cản (κ) khác nhau với đáp ứng dao động của các tấm tròn. Các giá trị của hệ số cản nằm trong khoảng từ 0 MNs/m^3 đến 0.5 MNs/m^3 . Khi hệ số cản tăng lên, biên độ dao động giảm đáng kể. Hình 2.28c thể hiện hiện tượng phách, kết quả của việc cho tần số cưỡng bức ($\Omega = 528 \text{ rad/s}$ và $\Omega = 540 \text{ rad/s}$) tiến sát tới tần số dao động tự nhiên ($\omega = 540.82 \text{ rad/s}$). Điều này dẫn đến các biên độ dao động cao và thấp xen kẽ theo thời gian, đặc trưng của hiện tượng phách trong các hệ động. Hình 2.28d nghiên cứu ảnh hưởng của sự thay đổi nhiệt độ đến các ứng xử dao động. Các đáp ứng được thể hiện cho ba mức nhiệt độ khác nhau ($\Delta T = 0 \text{ K}$, 100 K và 200 K). Khi nhiệt độ tăng lên, biên độ dao động tăng lên, cho thấy nhiệt độ cao gây ra thêm ứng suất và biến dạng trong kết cấu. Điều này cho thấy rằng những thay đổi về nhiệt độ có ảnh hưởng đáng kể tới ứng xử dao động, đòi hỏi phải xem xét khi thiết kế các kết cấu chịu nhiệt độ cao.

2.4. Kết luận Chương 2

Chương 2 đã nghiên cứu các ứng xử cơ nhiệt phi tuyến ổn định và động lực của chòm cầu và tấm tròn FG-GPLRC và FG-GPLRC lõi rỗng được gia cường bởi hệ gân FG-GPLRC và FG-GPLRC lõi rỗng tương ứng với các quy luật phân bố vật liệu kết hợp của chòm cầu/tấm tròn và gân tăng cứng, có và không có lớp áp điện. Hai trường hợp tải trọng cơ và nhiệt được xem xét trong cả hai trường hợp tĩnh và động. Lần đầu tiên, kỹ thuật san đều tác dụng gân của Lekhnitskii được phát triển thành công cho hệ gân tăng cứng mạng nhện hai vùng và ba vùng của chòm cầu/tấm tròn. Các phương trình cơ bản của bài toán đã được thiết lập dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển Donnell với tính phi tuyến hình học của von Karman. Bằng cách áp dụng phương trình Euler–Lagrange và kết hợp với hàm tiêu tán Rayleigh để mô tả hiệu ứng cản của cơ hệ, đã nhận được phương trình chuyển động phi tuyến của kết cấu. Liên hệ giữa tải trọng - độ võng tĩnh và tần số dao động tự do tuyến tính nhận được dưới dạng hiển, trong khi đó đáp ứng động lực của kết cấu thu được bằng phương pháp Runge-Kutta bậc bốn.

Từ các ví dụ số, đã rút ra một số nhận xét:

- Hiện tượng mất ổn định rẽ nhánh chỉ được quan sát đối với các tấm tròn FG-GPLRC không gia cường dưới tác dụng của tải trọng nhiệt, còn hiện tượng này không xảy ra đối với các tấm tròn có gân tăng cứng và các chòm cầu thoải có và không có gân tăng cứng.
- Hệ gân tăng cứng làm khả năng chịu tải của chòm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC tăng đáng kể, đồng thời giảm hiện tượng snap-through của chòm cầu thoải.
- Ảnh hưởng của các loại gân mạng nhện đến ứng xử sau mất ổn định được quan sát rõ ràng nhất trong trường hợp đường cong sau mất ổn định nhiệt của tấm tròn.
- Gân mạng nhện cũng thể hiện ưu điểm vượt trội trong việc cải thiện tần số dao động tự do tuyến tính, giảm biên độ dao động và tăng ổn định động cho kết cấu. Trong đó gân kinh tuyến thể hiện hiệu quả vượt trội so với gân vĩ tuyến trong các bài toán được xem xét.
- Tác động của các thông số hình học, vật liệu, nền đàn hồi tới ứng xử ổn định và động lực của kết cấu là rõ rệt trong các ví dụ số.

CHƯƠNG 3. ỔN ĐỊNH VÀ ĐỘNG LỰC PHI TUYẾN CỦA PANEL FG-CNTRC VÀ FG-GRC CÓ ĐỘ CONG PHỨC TẠP VÀ GÂN TĂNG CỨNG TRỰC GIAO

Trong công trình xây dựng, kết cấu panel được sử dụng phổ biến. Do đó, bài toán ổn định và động lực của dạng kết cấu này làm từ vật liệu composite truyền thống và tiên tiến được nhiều nhà khoa học tập trung nghiên cứu. Độ cong của panel được thiết kế theo các hàm độ cong phức tạp khác nhau nhằm đáp ứng các đòi hỏi ngày càng cao về khả năng chịu tải cũng như tính thẩm mỹ trong thiết kế kiến trúc. Ngoài ra, việc sử dụng gân tăng cứng để cải thiện khả năng chịu tải của panel là một giải pháp hiệu quả cần được tính đến.

Tuy nhiên, nghiên cứu và phân tích về ứng xử tĩnh và động của các panel composite có độ cong phức tạp có gân tăng cứng trong các công trình đã được công bố còn rất hạn chế. Chương này của luận án trình bày về ứng xử động và dao động phi tuyến của panel trụ, parabol, hình sin và được làm từ FG-CNTRC và FG-GRC được tăng cứng bằng gân FG-CNTRC và gân FG-GRC tương ứng có xét đến sự thay đổi nhiệt độ đều và các lớp áp điện. Ngoài ra, ảnh hưởng của nền đàn hồi phi tuyến tới ứng xử ổn định và động lực của panel cũng được xem xét một cách chi tiết.

Kỹ thuật san tác dụng gân FG-CNTRC và FG-GRC [1, 6], và phương pháp Galerkin được áp dụng để ước tính hàm ứng suất cho các panel cong phức tạp. Các phương trình chủ đạo được xây dựng bằng cách sử dụng HSDT, các phương trình Euler-Lagrange, và hàm tiêu tán của Rayleigh, từ đó nhận được các biểu thức cho phương trình chuyển động của các panel. Phương pháp Runge-Kutta và tiêu chuẩn Budiansky-Roth được sử dụng để phân tích đáp ứng động phi tuyến và độ võng động tới hạn của các panel. Tác động của độ nâng của các panel, các thông số hình học, phân bố tỷ phần thể tích của CNT và Graphene, lớp áp điện và sự thay đổi nhiệt độ đều tới tần số cơ bản và ứng xử động phi tuyến của các panel được nghiên cứu và thảo luận.

Nội dung chính của chương này đã được công bố trên 02 bài báo trên các tạp chí quốc tế ISI (SCIE), 01 bài báo đăng trên Tuyển tập công trình hội nghị cơ học toàn quốc và 01 bài đăng trên tạp chí Vietnam Journal of Mechanics (Bài báo số 2, 3, 6, và 7 trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả liên quan đến luận án)

3.1. Thiết kế hình dạng và thông số vật liệu của panel có độ cong phức tạp FG-CNTRC và FG-GRC

Xét các panel trụ, parabol và hình sin có gân nằm trên nền đàn hồi, chịu tải trọng nén dọc trục và áp lực ngoài. Các thông số hình học của panel được biểu thị bằng độ dày h , chiều dài cạnh dọc a và cạnh cong b của panel. Thiết kế gân bao gồm hướng gân, các thông số hình học và vật liệu của gân được trình bày trong Hình 3.1. Giả sử rằng các panel thoải theo hướng chu vi, do đó, hệ tọa độ Đề các $Oxyz$ được sử dụng như trong Hình 3.1.

Hình dạng mặt trung bình theo hướng cong của panel parabol và hình sin có thể biểu diễn theo các phương trình tương ứng như sau [1]:

$$z_{PPs} = \frac{4\delta}{b} \left(\frac{y^2}{b} - y \right), \quad z_{SPs} = -\delta \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (3.1)$$

Bán kính hình học của panel parabol và hình sin theo hướng cong được xác định từ biểu thức (3.1) như sau [1]:

$$R_{PPs} = \frac{\left[16\delta^2 (b - 2y)^2 + b^4 \right]^{3/2}}{8b^4\delta}, \quad R_{SPs} = \frac{\left[\pi^2\delta^2 \cos^2 \frac{\pi y}{b} + b^2 \right]^{3/2}}{\pi^2 b \delta \sin \frac{\pi y}{b}}. \quad (3.2)$$

3.1.1. Mô hình panel FG-CNTRC có gân tăng cứng FG-CNTRC và có lớp áp điện

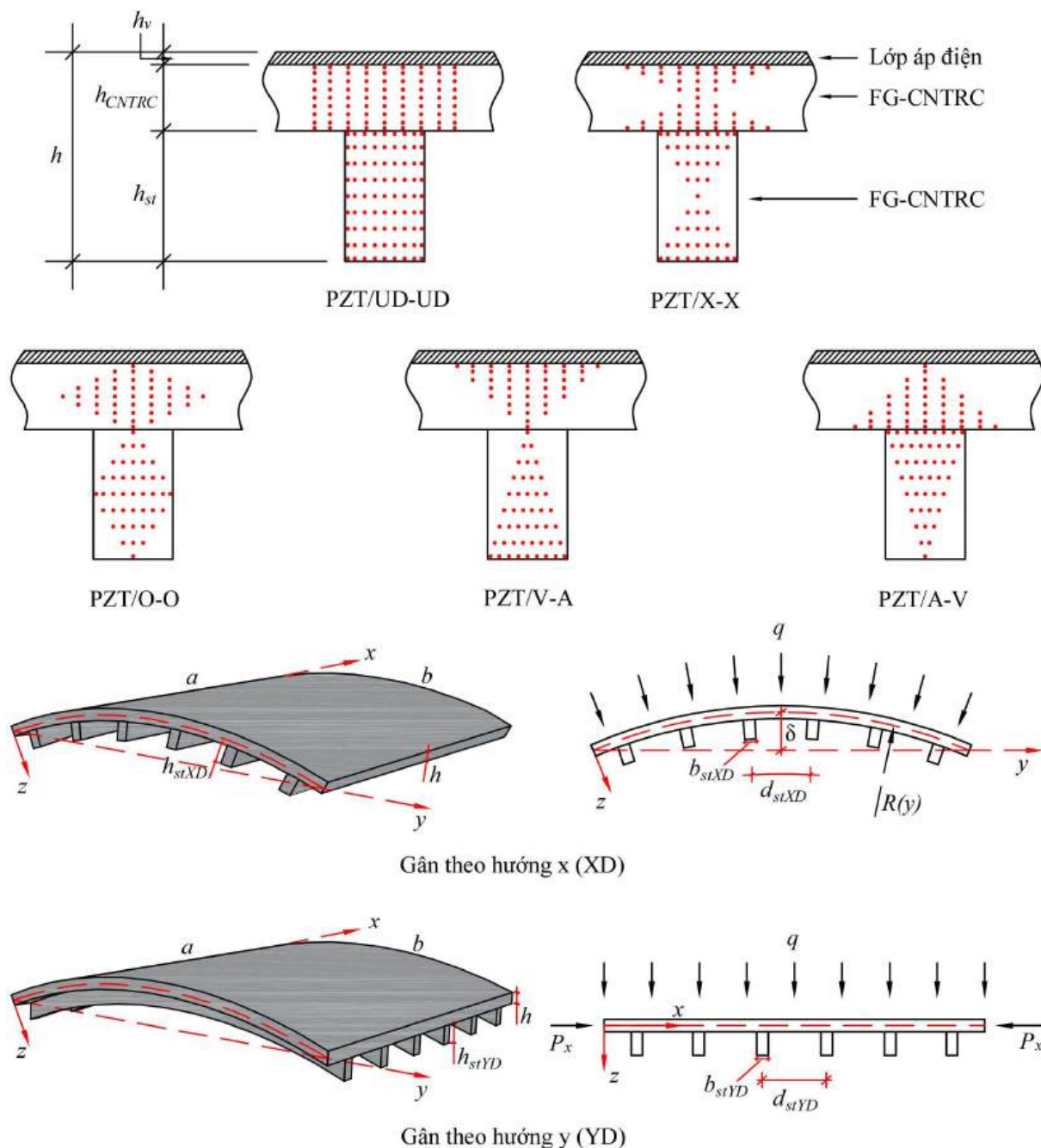
Các panel trụ, parabol và hình sin tăng cứng bằng các gân hướng x - hoặc y - với lớp áp điện trong môi trường nhiệt chịu áp suất bên ngoài và tải nén dọc trục được xem xét. Các panel và gân làm bằng FG-CNTRC, trong đó nền Poly Methyl Methacrylate (PMMA) đẳng hướng được gia cường bằng CNT. Lớp áp điện được phủ trên bề mặt trên cùng của panel.

Năm tổ hợp phân bố CNT của vỏ và gân bao gồm PZT/UD-UD, PZT/X-X, PZT/O-O, PZT/V-A và PZT/A-V, các thông số hình học của gân được mô tả trong Hình 3.1. Hệ trục tọa độ $Oxyz$ có thể được áp dụng dựa trên giả định độ cong thoải của các panel.

Trong chương này, CNT được sắp xếp theo hướng x của các panel trụ (XC), parabol (XP) và hình sin (XS) hoặc theo hướng y của các panel trụ (YC), parabol (YP) và hình sin (YS). Đối với các gân, CNT luôn được sắp xếp theo cùng hướng với các gân,

bao gồm các gân theo hướng x (XS) hoặc các gân theo hướng y (YS), hệ panel-gân thu được như sau

- Đối với panel trụ: panel XC-XS, YC-XS, XC-YS và YC-YS.
- Đối với panel parabol: panel XP-XS, YP-XS, XP-YS và YP-YS.
- Đối với Panel hình sin: Panel XS-XS, YS-XS, XS-YS và YS-YS.



Hình 3.1. Mô hình thiết kế và mô hình phân bố của CNT cho các panel có gân và lớp áp điện

Các quy luật phân bố tỷ phần thể tích của CNT theo bề dày của panel $(-h/2 + h_v \leq z \leq h/2)$ được thể hiện thông qua các hàm đồng nhất hoặc tuyến tính như sau:

$$V_{CNT} = \begin{cases} V_{CNT}^* & \text{UD-CNTRC} \\ \left(\frac{4|z - h_v/2|}{h - h_v} \right) V_{CNT}^* & \text{X-CNTRC} \\ \left(2 - \frac{4|z - h_v/2|}{h - h_v} \right) V_{CNT}^* & \text{O-CNTRC} \\ \left(\frac{h - 2z}{h - h_v} \right) V_{CNT}^* & \text{V-CNTRC} \\ \left(\frac{2z + h - 2h_v}{h - h_v} \right) V_{CNT}^* & \text{A-CNTRC} \end{cases} \quad (3.3)$$

và cho các gân $(h/2 \leq z \leq h/2 + h_{st})$:

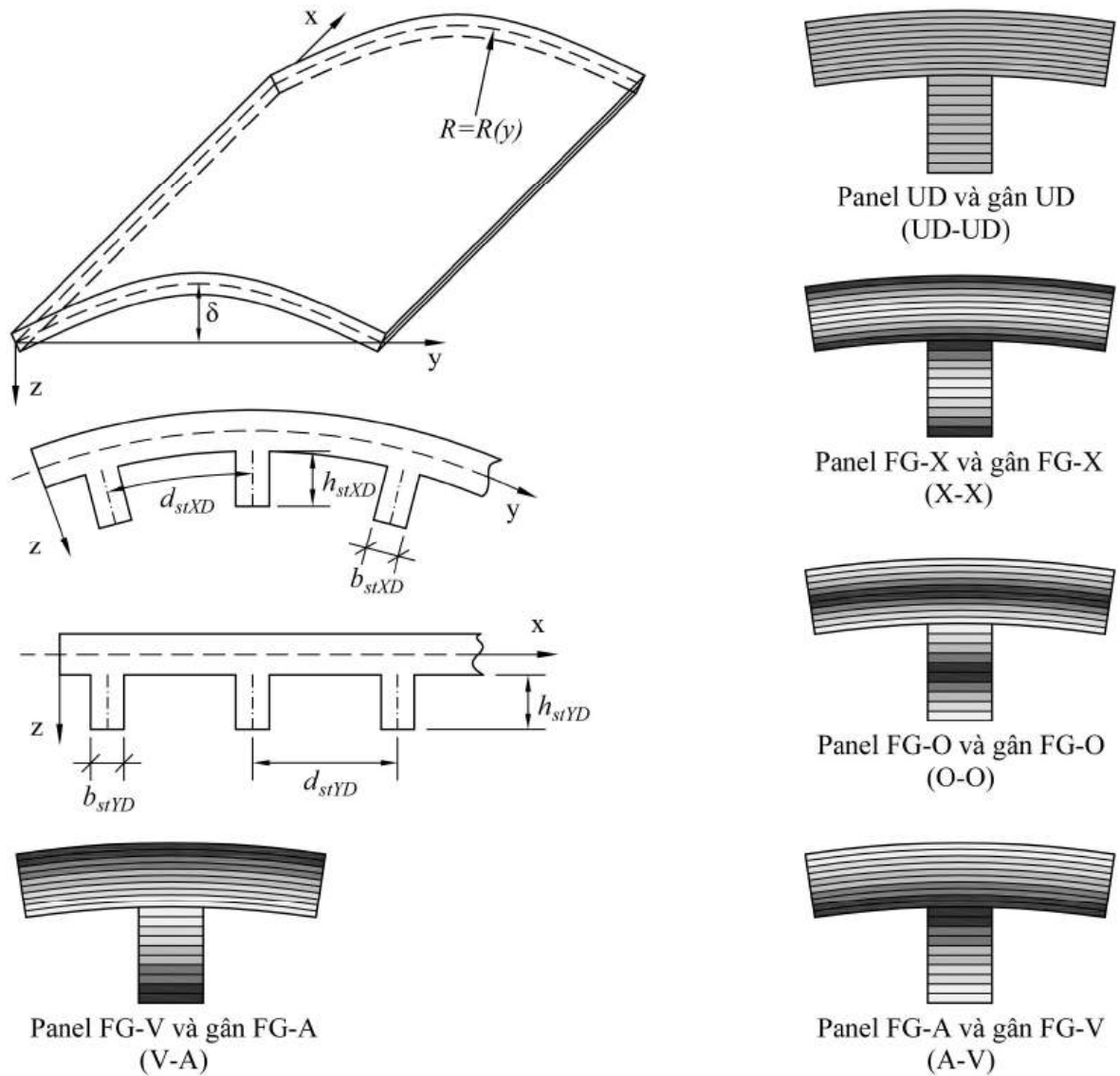
$$V_{CNT} = \begin{cases} V_{CNT}^* & \text{UD-CNTRC} \\ \left| \frac{2h - 4z}{h_{st}} + 2 \right| V_{CNT}^* & \text{X-CNTRC} \\ \left(2 - \left| \frac{4z - 2h}{h_{st}} - 2 \right| \right) V_{CNT}^* & \text{O-CNTRC} \\ \left(2 + \frac{h - 2z}{h_{st}} \right) V_{CNT}^* & \text{V-CNTRC} \\ \frac{2z - h}{h_{st}} V_{CNT}^* & \text{A-CNTRC} \end{cases} \quad (3.4)$$

Quy tắc hỗn hợp mở rộng được chọn để dự đoán các hằng số đàn hồi hiệu dụng. Các công thức của mô đun Young, mô đun trượt và hệ số Poisson được xác định như trong biểu thức (1.3) và (1.7). Tương tự, hệ số giãn nở nhiệt theo hướng x và y cho panel và gân được xác định như trong biểu thức (1.6).

3.1.2. Mô hình panel FG-GRC có gân tăng cứng trên nền đàn hồi Pasternak

Panel trụ, parabol, và hình sin cùng với gân tăng cứng được chế tạo từ nhiều lớp GRC, với năm loại phân bố graphene bao gồm UD, FG-X, FG-V, FG-A và FG-O, đồng thời có ba cách sắp xếp graphene bao gồm $(0)_{10T}$, $(0/90)_{5T}$ và $(0/90/0/90/0)_S$.

Thiết kế phân bố graphene sheet của các gân tăng cứng được thể hiện trong Hình 3.2. Xét panel và gân tăng cứng UD, tỷ lệ thể tích của graphene sheet là không đổi ($V_G = 0.07$) cho tất cả mười lớp. Đối với panel/gân tăng cứng FG-A, tỷ phần thể tích của graphene sheet được tăng từ lớp trên xuống lớp dưới và ngược lại đối với panel/gân tăng cứng FG-V. Tỷ lệ thể tích của graphene sheet gồm 10 lớp được ký hiệu là $[(0.11)_2/(0.09)_2/(0.07)_2/(0.05)_2/(0.03)_2]$ và $[(0.03)_2/(0.05)_2/(0.07)_2/(0.09)_2/(0.11)_2]$ tương ứng cho panel/gân tăng cứng FG-V và FG-A. Tỷ lệ thể tích của graphene sheet thay đổi đối xứng từ bề mặt giữa của panel/gân tăng cứng, $[0.11/0.09/0.07/0.05/0.03]_s$ và $[0.03/0.05/0.07/0.09/0.11]_s$ được ký hiệu cho panel và gân tăng cứng FG-O và FG-X tương ứng.



Hình 3.2. Mô hình vật liệu và hình học panel trụ, parabol và hình sin có gân tăng cứng

Theo trình bày trong chương 1, mô đun Young của các lớp GRC được dự đoán bằng cách sử dụng mô hình Hapin-Tsai mở rộng và hệ số giãn nở nhiệt được xác định bằng quy luật hỗn hợp mở rộng, như trong các biểu thức (1.13), (1.15) và (1.16).

Trong chương này, các tính chất vật liệu của FG-CNTRC, FG-GRC và lớp áp điện đều được xem xét là phụ thuộc nhiệt độ.

3.2. Cơ sở lý thuyết và kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến

Liên hệ ứng suất – biến dạng theo định luật Hooke có xét tới ứng suất nhiệt và điện được viết cho lớp vỏ FG-CNTRC và FG-GRC như sau:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^k \\ \sigma_y^k \\ \sigma_{xy}^k \\ \sigma_{xz}^k \\ \sigma_{yz}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_{11}^k \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_{22}^k \Delta T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

và cho lớp áp điện như sau:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^v \\ \sigma_y^v \\ \sigma_{xy}^v \\ \sigma_{xz}^v \\ \sigma_{yz}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^v & Q_{12}^v & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}^v & Q_{22}^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \left(\alpha_{11}^v \Delta T + \frac{d_{31} V_e}{h_v} \right) \\ \varepsilon_y - \left(\alpha_{22}^v \Delta T + \frac{d_{32} V_e}{h_v} \right) \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

trong đó chỉ số trên k có thể là *CNTRC* hoặc *GRC* để chỉ lớp FG-CNTRC hoặc GRC tương ứng, sự thay đổi nhiệt độ từ mốc nhiệt độ phòng được ký hiệu là ΔT , và Q_{ij} là các độ cứng rút gọn, được tính toán theo các biểu thức:

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= \frac{E_{11}^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad Q_{22}^k = \frac{E_{22}^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad Q_{12}^k = \frac{\nu_{21}^k E_{11}^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \\ Q_{44}^k &= G_{13}^k, \quad Q_{55}^k = G_{23}^k, \quad Q_{66}^k = G_{12}^k. \\ \\ Q_{11}^v &= \frac{E_{11}^v}{1 - (\nu_{12}^v)^2}, \quad Q_{22}^v = \frac{E_{22}^v}{1 - (\nu_{12}^v)^2}, \quad Q_{12}^v = \frac{\nu_{21}^v E_{11}^v}{1 - (\nu_{12}^v)^2}, \\ Q_{44}^v &= Q_{55}^v = Q_{66}^v = G_{12}^v. \end{aligned}$$

Trong chương này, PZT-5A cũng được lựa chọn cho lớp áp điện, nhưng khác chương 2, các tính chất vật liệu được xem xét phụ thuộc vào nhiệt độ như sau $E_{110}^v = E_{220}^v = 63 \text{ GPa}$, $G_{120}^v = 24.2 \text{ GPa}$, $\nu_{12}^v = 0.3$, $\alpha_{110}^v = \alpha_{220}^v = 0.9 \times 10^{-6} / \text{K}$, $\rho_v = 7600 \text{ kg/m}^3$, $E_{111}^v = E_{221}^v = -0.0005$, $G_{121}^v = -0.0002$, $\alpha_{111}^v = \alpha_{221}^v = 0.0005$, $d_{31} = d_{32} = 2.54 \times 10^{-10} \text{ m/V}$ và:

$$\begin{aligned} E_{11}^v &= E_{110}^v (1 + E_{111}^v \Delta T), E_{22}^v = E_{220}^v (1 + E_{221}^v \Delta T), \\ G_{12}^v &= G_{120}^v (1 + G_{121}^v \Delta T), \\ \alpha_{11}^v &= \alpha_{110}^v (1 + \alpha_{111}^v \Delta T), \alpha_{22}^v = \alpha_{220}^v (1 + \alpha_{221}^v \Delta T). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Theo HSDT, liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị của panel trụ, parabol và hình sin, có tính đến độ võng không hoàn hảo và thành phần phi tuyến theo độ võng, có thể được biểu diễn như sau:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{y,x} + \phi_{x,y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - z^2 \frac{4}{h^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_{,x} + \phi_x \\ w_{,y} + \phi_y \end{Bmatrix} - z^3 \frac{4}{3h^2} \begin{Bmatrix} w_{,xx} + \phi_{x,x} \\ w_{,yy} + \phi_{y,y} \\ \phi_{y,x} + 2w_{,xy} + \phi_{x,y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.8)$$

trong đó:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{w_{,x}^2}{2} + w_{,x} w_{,x}^* \\ v_{,y} + \frac{w_{,y}^2}{2} + w_{,y} w_{,y}^* - \frac{w}{R(y)} \\ v_{,x} + u_{,y} + w_{,x} w_{,y} + w_{,y} w_{,x}^* + w_{,x} w_{,y}^* \\ w_{,x} + \phi_x \\ w_{,y} + \phi_y \end{Bmatrix}. \quad (3.9)$$

Các thành phần lực giãn, mômen, và mômen bậc cao của các thành phần nội lực cơ, nhiệt và điện của panel trụ, parabol và hình sin có thể thu được bằng cách tích phân các phương trình định luật Hooke (3.5), (3.6), và kết hợp với kỹ thuật san tác dụng gân dẹt hướng dành cho gân làm bằng FG-CNTRC và FG-GRC [1, 6] trong khuôn khổ của HSDT, nhận được như sau:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 & F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & F_{66} \\ D_{11} & D_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 & L_{11} & L_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & F_{12} & F_{22} & 0 & L_{12} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & F_{66} & 0 & 0 & L_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{y,x} + \phi_{x,y} \\ -\lambda(w_{,xx} + \phi_{x,x}) \\ -\lambda(w_{,yy} + \phi_{y,y}) \\ -\lambda(\phi_{y,x} + 2w_{,xy} + \phi_{x,y}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi_{1x} \\ \Phi_{1y} \\ 0 \\ \Phi_{2x} \\ \Phi_{2y} \\ 0 \\ \Phi_{4x} \\ \Phi_{4y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

trong đó $\lambda = 4/(3h^2)$, các thành phần $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, F_{ij}$ và L_{ij} là các độ cứng của panel trụ, panel parabol và panel hình sin có gân, được xác định bằng cách tính tổng độ cứng của các vỏ panel và gân tăng cứng như sau:

$$(A_{ij}^{sh}, B_{ij}^{sh}, C_{ij}^{sh}, D_{ij}^{sh}, F_{ij}^{sh}, L_{ij}^{sh}) = (A_{ij}^{st}, B_{ij}^{st}, C_{ij}^{st}, D_{ij}^{st}, F_{ij}^{st}, L_{ij}^{st}), \quad (3.11)$$

với:

$$(A_{ij}^{sh}, B_{ij}^{sh}, C_{ij}^{sh}, D_{ij}^{sh}, F_{ij}^{sh}, L_{ij}^{sh}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{sh}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6).$$

Độ cứng của gân tăng cứng $A_{11}^{st}, B_{11}^{st}, C_{11}^{st}, D_{11}^{st}, F_{11}^{st}, L_{11}^{st}$ được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{st} & B_{11}^{st} & D_{11}^{st} \\ B_{11}^{st} & C_{11}^{st} & F_{11}^{st} \\ D_{11}^{st} & F_{11}^{st} & L_{11}^{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} \\ \bar{B}_{11} & \bar{C}_{11} & \bar{F}_{11} \\ \bar{D}_{11} & \bar{F}_{11} & \bar{L}_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & 0 & \bar{B}_{12} & 0 & \bar{D}_{12} & 0 \\ \bar{B}_{12} & 0 & \bar{C}_{12} & 0 & \bar{F}_{12} & 0 \\ \bar{D}_{12} & 0 & \bar{F}_{12} & 0 & \bar{L}_{12} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & 0 & \bar{B}_{22} & 0 & \bar{D}_{22} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & \bar{B}_{66} & 0 & \bar{D}_{66} \\ \bar{B}_{22} & 0 & \bar{C}_{22} & 0 & \bar{F}_{22} & 0 \\ 0 & \bar{B}_{66} & 0 & \bar{C}_{66} & 0 & \bar{F}_{66} \\ \bar{D}_{22} & 0 & \bar{F}_{22} & 0 & \bar{L}_{22} & 0 \\ 0 & \bar{D}_{22} & 0 & \bar{F}_{66} & 0 & \bar{L}_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & \bar{B}_{12} & \bar{D}_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_{12} & \bar{C}_{12} & \bar{F}_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{D}_{12} & \bar{F}_{12} & \bar{L}_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

với:

$$(\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{C}_{ij}, \bar{D}_{ij}, \bar{F}_{ij}, \bar{L}_{ij}) = \frac{b_{st}}{d_{st}} \int_{h/2}^{h/2+h_{st}} Q_{ij}^{st}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6).$$

Tương tự, nội lực nhiệt và điện của panel có gân có thể được tính như sau:

$$\begin{aligned}(\Phi_{1x}, \Phi_{2x}, \Phi_{4x}) &= (\Phi_{1x}^{sh}, \Phi_{2x}^{sh}, \Phi_{4x}^{sh}) + (\Phi_{1x}^{st}, \Phi_{2x}^{st}, \Phi_{4x}^{st}), \\ (\Phi_{1y}, \Phi_{2y}, \Phi_{4y}) &= (\Phi_{1y}^{sh}, \Phi_{2y}^{sh}, \Phi_{4y}^{sh}) + (\Phi_{1y}^{st}, \Phi_{2y}^{st}, \Phi_{4y}^{st}),\end{aligned}\quad (3.13)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}(\Phi_{1x}^{sh}, \Phi_{2x}^{sh}, \Phi_{4x}^{sh}) &= \int_{-h/2}^{-h/2+h_v} \frac{(Q_{11}^v d_{31} + Q_{12}^v d_{32}) V_e}{h_v} (1, z, z^3) dz \\ &\quad + \Delta T \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11}^{sh} \alpha_{11}^{sh} + Q_{12}^{sh} \alpha_{22}^{sh}) (1, z, z^3) dz, \\ (\Phi_{1y}^{sh}, \Phi_{2y}^{sh}, \Phi_{4y}^{sh}) &= \int_{-h/2}^{-h/2+h_v} \frac{(Q_{12}^v d_{31} + Q_{22}^v d_{32}) V_e}{h_v} (1, z, z^3) dz \\ &\quad + \Delta T \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{12}^{sh} \alpha_{11}^{sh} + Q_{22}^{sh} \alpha_{22}^{sh}) (1, z, z^3) dz,\end{aligned}$$

và:

$$\begin{aligned}(\Phi_{1x}^{st}, \Phi_{2x}^{st}, \Phi_{4x}^{st}) &= \frac{b_{stXD}}{d_{stXD}} \Delta T \int_{h/2}^{h/2+h_{stXD}} (Q_{11}^{stXD} \alpha_{11}^{stXD} + Q_{12}^{stXD} \alpha_{22}^{stXD}) (1, z, z^3) dz, \\ (\Phi_{1y}^{st}, \Phi_{2y}^{st}, \Phi_{4y}^{st}) &= \frac{b_{stYD}}{d_{stYD}} \Delta T \int_{h/2}^{h/2+h_{stYD}} (Q_{12}^{stYD} \alpha_{11}^{stYD} + Q_{22}^{stYD} \alpha_{22}^{stYD}) (1, z, z^3) dz.\end{aligned}$$

Lực cắt và lực cắt bậc cao Q_x, Q_y và S_x, S_y được trình bày như sau:

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ S_x \\ S_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & 0 & I_{44} & 0 \\ 0 & H_{55} & 0 & I_{55} \\ I_{44} & 0 & J_{44} & 0 \\ 0 & I_{55} & 0 & J_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \\ w_{,x} + \phi_x \\ w_{,y} + \phi_y \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

trong đó:

$$(H_{ij}, I_{ij}, J_{ij}) = (H_{ij}^{sh}, I_{ij}^{sh}, J_{ij}^{sh}) + (H_{ij}^{st}, I_{ij}^{st}, J_{ij}^{st}), \quad (i, j = 4, 5)$$

với:

$$(H_{ij}^{sh}, I_{ij}^{sh}, J_{ij}^{sh}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{sh} (1, z^2, z^4) dz, \quad (H_{ij}^{st}, I_{ij}^{st}, J_{ij}^{st}) = \frac{b_{st}}{d_{st}} \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{st} (1, z^2, z^4) dz,$$

Phương trình tương thích thu được từ phương trình (3.9) như sau:

$$\bar{\varepsilon}_{x,yy} + \bar{\varepsilon}_{y,xx} - \bar{\gamma}_{xy,xy} = w_{,xy}^2 - \frac{w_{,xx}}{R(y)} - w_{,xx}w_{,yy} - w_{,xx}w_{,yy}^* + 2w_{,xy}w_{,xy}^* - w_{,xx}w_{,yy}^*. \quad (3.15)$$

Hàm ứng suất $\zeta(x, y)$ có thể được đưa ra đáp ứng các điều kiện sau:

$$N_x = \zeta_{,yy}, \quad N_{xy} = -\zeta_{,xy}, \quad N_y = \zeta_{,xx}. \quad (3.16)$$

Kết hợp các biểu thức lực, mômen (3.10) và điều kiện (3.16), biến đổi phương trình tương thích biến dạng (3.15) và viết lại dưới dạng:

$$\begin{aligned} \Theta \equiv & A_{22}^* \zeta_{,xxxx} + (A_{66}^* + 2A_{12}^*) \zeta_{,xxyy} + A_{11}^* \zeta_{,yyyy} + (B_{21}^* - \lambda C_{21}^*) \phi_{x,xxx} \\ & + (\lambda C_{66}^* - \lambda C_{11}^* + B_{11}^* - B_{66}^*) \phi_{x,xyy} + (\lambda C_{66}^* - \lambda C_{22}^* + B_{22}^* - B_{66}^*) \phi_{y,xxxy} \\ & + (B_{12}^* - \lambda C_{12}^*) \phi_{y,yyy} - \lambda C_{21}^* w_{,xxx} - \lambda (C_{11}^* + C_{22}^* - 2C_{66}^*) w_{,xxyy} \\ & - \lambda C_{12}^* w_{,yyy} + \frac{w_{,xx}}{R(y)} - w_{,xy}^2 + w_{,xx}w_{,yy} + w_{,xx}w_{,yy}^* - 2w_{,xy}w_{,xy}^* + w_{,xx}^*w_{,yy} = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \Gamma &= A_{11}A_{22} - A_{12}^2, A_{11}^* = A_{22}/\Gamma, A_{12}^* = -A_{12}/\Gamma, A_{22}^* = A_{11}/\Gamma, A_{66}^* = 1/A_{66}, \\ B_{11}^* &= A_{11}^*B_{11} + A_{12}^*B_{12}, B_{12}^* = A_{11}^*B_{12} + A_{12}^*B_{22}, B_{21}^* = A_{22}^*B_{12} + A_{12}^*B_{11}, \\ B_{22}^* &= A_{22}^*B_{22} + A_{12}^*B_{12}, B_{66}^* = A_{66}^*B_{66}, D_{11}^* = A_{11}^*D_{11} + A_{12}^*D_{12}, \\ D_{12}^* &= A_{11}^*D_{12} + A_{12}^*D_{22}, D_{21}^* = A_{22}^*D_{12} + A_{12}^*D_{11}, D_{22}^* = A_{22}^*D_{22} + A_{12}^*D_{12}, D_{66}^* = A_{66}^*D_{66}, \end{aligned}$$

3.3. Điều kiện biên, xấp xỉ hàm ứng suất và phương trình Euler-Lagrange

Xét các điều kiện biên sau:

Điều kiện biên 1: panel trụ, parabol và hình sin được giả định đặt trên các gối di động ở bốn cạnh và có thể di chuyển tự do theo hướng x và y (FFFF) như sau:

$$\begin{aligned} w|_{x=0,a} = 0, N_{xy}|_{x=0,a} = 0, M_x|_{x=0,a} = 0, T_x|_{x=0,a} = 0, \phi_y|_{x=0,a} = 0, N_x = N_{0x} = -hP_x, \\ w|_{y=0,b} = 0, N_{xy}|_{y=0,b} = 0, M_y|_{y=0,b} = 0, T_y|_{y=0,b} = 0, \phi_x|_{y=0,b} = 0, N_y = N_{0y} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Điều kiện biên 2: panel trụ, parabol và hình sin được giả định đặt trên gối ở bốn cạnh, có thể di chuyển tự do ở hai cạnh $x = 0, x = a$ (gối di động) và không thể di chuyển ở hai cạnh $y = 0, y = b$ (gối cố định) (FIFI) như sau:

$$\begin{aligned} w|_{x=0,a} = 0, N_{xy}|_{x=0,a} = 0, M_x|_{x=0,a} = 0, T_x|_{x=0,a} = 0, \phi_y|_{x=0,a} = 0, N_x = N_{0x} = -hP_x, \\ w|_{y=0,b} = 0, v = 0, M_y|_{y=0,b} = 0, T_y|_{y=0,b} = 0, \phi_x|_{y=0,b} = 0, N_y = N_{0y}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Để thỏa mãn điều kiện biên gối tại 4 cạnh, các dạng nghiệm của độ võng, góc quay và độ võng không hoàn hảo của panel được chọn là:

$$\begin{aligned} w &= W \sin \alpha x \sin \beta y, \quad w^* = \xi h \sin \alpha x \sin \beta y \\ \phi_x &= \Phi_x \cos \alpha x \sin \beta y, \quad \phi_y = \Phi_y \sin \alpha x \cos \beta y, \end{aligned} \quad (3.20)$$

trong đó ξ là độ không hoàn hảo của panel, $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$; m và n lần lượt là số nửa sóng theo hướng dọc và cong. Do kết cấu gặp bất lợi nhất trong trường hợp dạng của độ võng không hoàn hảo giống với dạng của độ võng, nên chương này chọn dạng của độ võng không hoàn hảo giống với dạng của độ võng. Cũng lưu ý rằng dạng nghiệm (3.20) không thỏa mãn một cách chính xác các điều kiện biên, tuy vậy nhiều nghiên cứu chỉ ra rằng sai số nhỏ này không làm ảnh hưởng đáng kể đến kết quả của bài toán.

Do độ cong phức tạp trong phương trình tương thích (3.17) nên không thể tìm được chính xác dạng hàm ứng suất của panel hình sin và panel parabol. Trong chương này, dạng hàm ứng suất của panel hình sin và panel parabol cũng được chọn giống dạng chính xác của panel trụ bao gồm các thành phần tuyến tính và phi tuyến:

$$\zeta = \zeta_1 \cos 2\alpha x + \zeta_2 \cos 2\beta y + \zeta_3 \sin \alpha x \sin \beta y + \frac{1}{2} N_{0y} x^2 + \frac{1}{2} N_{0x} y^2. \quad (3.21)$$

Một kỹ thuật gần đúng để xác định dạng hàm ứng suất cho panel parabol và panel hình sin có thể được thực hiện bằng cách thế các phương trình (3.20), (3.21) vào (3.17) rồi áp dụng phương pháp Galerkin, dẫn tới:

$$\int_0^b \int_0^a \Theta \cos 2\alpha x \, dx dy = 0, \quad \int_0^b \int_0^a \Theta \cos 2\beta y \, dx dy = 0, \quad \int_0^b \int_0^a \Theta \sin \alpha x \sin \beta y \, dx dy = 0. \quad (3.22)$$

dẫn đến:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= V_{11} W (W + 2\xi h) + V_{12} W, \\ \zeta_2 &= V_{21} W (W + 2\xi h) + V_{22} W, \\ \zeta_3 &= V_{31} \Phi_x + V_{32} \Phi_y + V_{33} W, \end{aligned} \quad (3.23)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{\beta^2}{32\alpha^2 A_{22}^*}, \quad V_{21} = \frac{\alpha^2}{32\beta^2 A_{11}^*}, \\ \delta_m &= (-1)^m - 1, \quad \delta_n = (-1)^n - 1 \\ V_{12} &= \frac{8\delta_n^2 [R_{2(c,p,s)} - R_{3(c,p,s)}] \delta_m^2 - 12\beta \delta_m \delta_n R_{1(c,p,s)} ab\alpha - 9R_{2(c,p,s)} a^2 b^2 \alpha^2 \beta^2}{72a^3 \alpha^6 b^3 \beta^2 A_{22}^* - 128a\alpha^4 b A_{22}^* \delta_m^2 \delta_n^2} \\ V_{22} &= \frac{-8\delta_n^2 [R_{2(c,p,s)} - R_{3(c,p,s)}] \delta_m^2 - 12\beta \delta_m \delta_n R_{1(c,p,s)} ab\alpha - 9R_{3(c,p,s)} a^2 b^2 \alpha^2 \beta^2}{72a^3 \alpha^2 b^3 \beta^6 A_{11}^* - 128ab\beta^4 A_{11}^* \delta_m^2 \delta_n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{31} &= -\frac{\alpha \left\{ \left[(D_{66}^* - D_{11}^*)\lambda + B_{11}^* - B_{66}^* \right] \beta^2 + \alpha^2 (-\lambda D_{21}^* + B_{21}^*) \right\}}{\alpha^4 A_{22}^* + \beta^2 (2A_{12}^* + A_{66}^*) \alpha^2 + \beta^4 A_{11}^*}, \quad R_{1c} = \frac{-\alpha^2 ab \delta}{2\delta^2 + 2(b/2)^2}, \\
V_{32} &= -\frac{\beta \left\{ \left[(D_{66}^* - D_{22}^*)\lambda + B_{22}^* - B_{66}^* \right] \alpha^2 + \beta^2 (-\lambda D_{12}^* + B_{12}^*) \right\}}{\alpha^4 A_{22}^* + \beta^2 (2A_{12}^* + A_{66}^*) \alpha^2 + \beta^4 A_{11}^*}, \quad R_{2c} = R_{3c} = \frac{2\delta \alpha \delta_m \delta_n}{3\beta \left[\delta^2 + (b/2)^2 \right]}, \\
V_{33} &= \frac{\lambda \alpha^4 D_{21}^* + \lambda \beta^2 (D_{11}^* + D_{22}^* - 2D_{66}^*) \alpha^2 + \lambda \beta^4 D_{12}^*}{\alpha^4 A_{22}^* + \beta^2 (2A_{12}^* + A_{66}^*) \alpha^2 + \beta^4 A_{11}^*} \\
&\quad - \frac{\alpha \beta \left\{ 36R_{1(c,p,s)} ab \alpha \beta + 24 \left[R_{2(c,p,s)} + R_{3(c,p,s)} \right] \delta_m \delta_n \right\}}{\left[\alpha^4 A_{22}^* + \beta^2 (2A_{12}^* + A_{66}^*) \alpha^2 + \beta^4 A_{11}^* \right] (9a^2 \alpha^2 b^2 \beta^2 - 16\delta_n^2 \delta_m^2)}, \\
R_{1(p,s)} &= -\frac{1}{2} \alpha^2 a \int_0^b \frac{\sin^2 \beta y}{R_{(p,s)}} dy, \quad R_{2(p,s)} = -\frac{1}{3} \alpha \delta_m \int_0^b \frac{\sin \beta y}{R_{(p,s)}} dy, \quad R_{3(p,s)} = \alpha \delta_m \int_0^b \frac{\sin \beta y \cos 2\beta y}{R_{(p,s)}} dy,
\end{aligned}$$

với c, p, s là ký hiệu cho panel trụ, parabol và hình sin tương ứng.

Hàm ứng suất có thể thu được chính xác với biểu thức (3.22) trong trường hợp panel trụ.

Đối với điều kiện biên thứ hai (FIFI), điều kiện cố định ở hai cạnh $y = 0, y = b$ được biểu diễn dưới dạng trung bình như sau:

$$\int_0^b \int_0^a v_{,y} dx dy = \Upsilon_{11} W + \Upsilon_{12} \Phi_x + \Upsilon_{13} \Phi_y + \Upsilon_{14} W (2\xi h + W) - P_x h \Upsilon_{15} + \Upsilon_{16} N_{0y} + \Upsilon_{17} = 0, \quad (3.24)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{11} &= -\frac{(V_{33} \alpha^2 A_{22}^* + V_{33} \beta^2 A_{12}^* + \alpha^2 \lambda D_{21}^* + \beta^2 \lambda D_{22}^*) \delta_m \delta_n}{\alpha \beta} + R_{4(c,p,s)}, \quad \Upsilon_{14} = -\frac{1}{8} a \beta^2 b, \\
\Upsilon_{12} &= -\frac{\left[\alpha^2 V_{31} A_{22}^* + (\lambda D_{21}^* - B_{21}^*) \alpha + \beta^2 V_{31} A_{12}^* \right] \delta_m \delta_n}{\alpha \beta}, \quad \Upsilon_{15} = ba A_{12}^*, \quad \Upsilon_{16} = ba A_{22}^*, \\
\Upsilon_{13} &= -\frac{\left[V_{32} \beta^2 A_{12}^* + (\lambda D_{22}^* - B_{22}^*) \beta + V_{32} \alpha^2 A_{22}^* \right] \delta_m \delta_n}{\alpha \beta}, \quad \Upsilon_{17} = ab (A_{12}^* N_{Tx} + A_{22}^* N_{Ty}), \\
R_{4c} &= \frac{2\delta \delta_m \delta_n}{\left[\delta^2 + (b/2)^2 \right] \alpha \beta}, \quad R_{4(p,s)} = \frac{\delta_m}{\alpha} \int_0^b \frac{\sin \beta y}{R_{(p,s)}} dy.
\end{aligned}$$

Năng lượng biến dạng của panel, công do ngoại lực thực hiện có xét đến tương tác giữa panel và nền đàn nhớt được tính như sau:

$$\Phi_{in} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^b \int_0^a \left[\sigma_x \left(\varepsilon_x - \alpha_{11} \Delta T - \frac{d_{31} V_e}{h_v} \right) + \sigma_y \left(\varepsilon_y - \alpha_{22} \Delta T - \frac{d_{32} V_e}{h_v} \right) + \sigma_{xy} (\gamma_{xy} - \alpha_{12} \Delta T) + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} \right] dx dy dz, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ext} = & \int_0^b \int_0^a q w dx dy - \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{1}{2} w [K_1 w - K_2 (w_{,xx} + w_{,yy})] \right\} dx dy \\ & + N_{0x} \int_0^b \int_0^a \left(\bar{\varepsilon}_x - \frac{w_{,x}^2}{2} - w_{,x} w_{,x}^* \right) dx dy, \end{aligned} \quad (3.26)$$

Giả sử rằng các thành phần động năng theo hướng x và y là rất nhỏ so với thành phần động năng theo hướng z, dẫn tới:

$$\Phi_T = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^b \int_0^a \rho \bar{w}_t^2 dx dy dz. \quad (3.27)$$

Hàm Lagrange được biểu diễn dưới dạng:

$$\Phi = \Phi_T - \Phi_{in} + \Phi_{ext}. \quad (3.28)$$

Thế năng cản của kết cấu sử dụng hàm tiêu tán Rayleigh được biểu diễn dưới dạng:

$$D = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \kappa \dot{w}^2 dx dy. \quad (3.29)$$

trong đó κ là hệ số cản của cơ hệ.

Có thể áp dụng các phương trình Euler-Lagrange kết hợp với hàm tiêu tán Rayleigh như sau:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{W}} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial W} + \frac{\partial D}{\partial \dot{W}} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\Phi}_x} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_x} &= 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\Phi}_y} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_y} = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

dẫn đến:

$$\begin{aligned} \Psi_{11} W + \Phi_x \Psi_{12} + \Phi_y \Psi_{13} + \Phi_y \Psi_{15} (h\xi + W) + \Phi_x \Psi_{14} (h\xi + W) + \Psi_{16} W \left(\frac{4}{3} h\xi + W \right) \\ + \Psi_{17} W (h\xi + W) (2h\xi + W) + \Psi_{18} N_{0x} + \Psi_{19} N_{0x} (h\xi + W) + \Psi_{20} N_{0y} \\ - \Psi_{22} q - \Psi_{23} + \Psi_{24} \ddot{W} + \Psi_{25} \kappa \dot{W} = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\Psi_{12} W + L_{22} \Phi_x + L_{23} \Phi_y + L_{24} W (2h\xi + W) + L_{25} N_{0x} + L_{26} N_{0y} - L_{27} = 0, \quad (3.32)$$

$$\Psi_{13}W + L_{23}\Phi_x + Y_{23}\Phi_y + Y_{24}W(2h\xi + W) + Y_{25}N_{0x} + Y_{26}N_{0y} - Y_{27} = 0, \quad (3.33)$$

trong đó:

$$\Psi_{11} = \frac{ab}{4} \left\{ \begin{aligned} & \left(32A_{22}^*V_{12}^2 + A_{22}^*V_{33}^2 + \lambda^2L_{11}^* \right) \alpha^4 + \left[\left(L_{12}^* + L_{21}^* + 4L_{66}^* \right) \lambda^2 + V_{33}^2 \left(2A_{12}^* + A_{66}^* \right) \right] \alpha^2 \beta^2 \\ & + \left(9J_{44}\lambda^2 - 6I_{44}\lambda + H_{44} \right) \alpha^2 + \left(32A_{11}^*V_{22}^2 + A_{11}^*V_{33}^2 + \lambda^2L_{22}^* \right) \beta^4 + \\ & + \left(9J_{55}\lambda^2 - 6I_{55}\lambda + H_{55} \right) \beta^2 + K_1 + K_2 \left(\alpha^2 + \beta^2 \right) - \\ & - \frac{32 \left[V_{12}A_{22}^*\alpha^4 + \beta^2A_{12}^*(V_{12} + V_{22})\alpha^2 + \beta^4V_{22}A_{11}^* \right] \delta_m \delta_n V_{33}}{3ab\beta\alpha} \end{aligned} \right\},$$

$$\Psi_{12} = \frac{ab}{8} \left\{ \begin{aligned} & 2V_{31}V_{33}\alpha^4A_{22}^* + \lambda \left(2\lambda L_{11}^* - F_{11}^* - \bar{F}_{11}^* \right) \alpha^3 + \beta^2 \left(4A_{12}^* + 2A_{66}^* \right) V_{33}V_{31}\alpha^2 \\ & + \left[\left(L_{12}^* + L_{21}^* + 4L_{66}^* \right) \beta^2 \lambda^2 - \left(\bar{F}_{21}^* + 2\bar{F}_{66}^* + F_{12}^* + 2F_{66}^* \right) \beta^2 \lambda \right] \alpha \\ & + 2V_{31}V_{33}\beta^4A_{11}^* + \left(18\lambda^2J_{44} - 12I_{44}\lambda + 2H_{44} \right) \alpha \\ & - \frac{32 \left(V_{12}A_{22}^*\alpha^4 + \beta^2(V_{12} + V_{22})A_{12}^*\alpha^2 + V_{22}\beta^4A_{11}^* \right) V_{31}\delta_m\delta_n}{3ab\beta\alpha} \end{aligned} \right\},$$

$$\Psi_{14} = -\frac{8 \left(V_{11}\alpha^4A_{22}^* + \alpha^2\beta^2(V_{11} + V_{21})A_{12}^* + \beta^4V_{21}A_{11}^* \right) \delta_m\delta_n V_{31}}{3\beta\alpha},$$

$$\Psi_{15} = -\frac{8 \left(V_{11}\alpha^4A_{22}^* + \alpha^2\beta^2(V_{11} + V_{21})A_{12}^* + \beta^4V_{21}A_{11}^* \right) \delta_m\delta_n V_{32}}{3\beta\alpha},$$

$$\Psi_{13} = \frac{ab}{8} \left\{ \begin{aligned} & 2V_{33}A_{11}^*\beta^4V_{32} + \lambda \left(2\lambda L_{22}^* - F_{22}^* - \bar{F}_{22}^* \right) \beta^3 + \alpha^2V_{32} \left(4A_{12}^* + 2A_{66}^* \right) V_{33}\beta^2 \\ & + \left[\left(L_{12}^* + L_{21}^* + 4L_{66}^* \right) \alpha^2 \lambda^2 - \left(F_{21}^* + 2F_{66}^* + \bar{F}_{12}^* + 2\bar{F}_{66}^* \right) \alpha^2 \lambda \right] \beta \\ & + 2A_{22}^*V_{33}V_{32}\alpha^4 + \left(18\lambda^2J_{55} - 12\lambda I_{55} + 2H_{55} \right) \beta \\ & - \frac{32 \left(V_{12}\alpha^4A_{22}^* + A_{12}^*\beta^2(V_{12} + V_{22})\alpha^2 + V_{22}\beta^4A_{11}^* \right) \delta_n\delta_m V_{32}}{3ab\beta\alpha} \end{aligned} \right\},$$

$$\Psi_{16} = 24ab \left(V_{11}V_{12}\alpha^4A_{22}^* + V_{21}V_{22}\beta^4A_{11}^* \right) - \frac{4 \left(V_{11}\alpha^4A_{22}^* + \alpha^2\beta^2(V_{11} + V_{21})A_{12}^* + \beta^4V_{21}A_{11}^* \right) \delta_m\delta_n V_{33}}{\beta\alpha},$$

$$\Psi_{17} = 16ba \left(V_{11}^2\alpha^4A_{22}^* + V_{21}^2\beta^4A_{11}^* \right), \Psi_{18} = \frac{\lambda \left(\alpha^2D_{11}^* + \beta^2D_{12}^* \right) \delta_n\delta_m}{\beta\alpha}, \Psi_{19} = \frac{1}{4}\alpha^2ab,$$

$$\Psi_{20} = -\frac{V_{33} \left(\alpha^2A_{22}^* + \beta^2A_{12}^* \right) \delta_m\delta_n}{\beta\alpha}, \Psi_{22} = \frac{\delta_n\delta_m}{\beta\alpha}, \Psi_{24} = \frac{1}{4}\rho_1ab, \Psi_{25} = \frac{1}{4}ab,$$

$$\Psi_{23} = -\frac{\left[\left(D_{11}^* \Phi_{1x} + D_{21}^* \Phi_{1y} - \Phi_{4x}\right)\alpha^2 + \beta^2 \left(D_{12}^* \Phi_{1x} + D_{22}^* \Phi_{1y} - \Phi_{4y}\right)\right] \lambda \delta_n \delta_m}{\beta \alpha},$$

$$\rho_1^G = \int_{-h/2}^{h/2} (V_G \rho_G + V_m \rho_m) dz + \frac{b_{st}}{d_{st}} \int_{h/2}^{h/2+h_{st}} (V_G \rho_G + V_m \rho_m) dz,$$

$$\rho_1^{CNT} = \int_{-h/2}^{-h/2+h_v} \rho_v dz + \int_{-h/2+h_v}^{h/2} (V_{CNT} \rho_{CNT} + V_m \rho_m) dz + \frac{b_{st}}{d_{st}} \int_{h/2}^{h/2+h_{st}} (V_{CNT} \rho_{CNT} + V_m \rho_m) dz,$$

$$L_{22} = \frac{ab}{4} \left\{ \left[A_{22}^* \alpha^4 + \beta^4 A_{11}^* + \alpha^2 \beta^2 (2A_{12}^* + A_{66}^*) \right] V_{31}^2 + \left[\lambda^2 L_{11}^* - (F_{11}^* + \bar{F}_{11}^*) \lambda + C_{11}^* \right] \alpha^2 \right\} \\ + \left[\lambda^2 L_{66}^* - (F_{66}^* + \bar{F}_{66}^*) \lambda + C_{66}^* \right] \beta^2 + 9J_{44} \lambda^2 - 6I_{44} \lambda + H_{44} \right\},$$

$$L_{23} = \frac{ab}{8} \left\{ 2 \left[A_{22}^* \alpha^4 + (2A_{12}^* + A_{66}^*) \alpha^2 \beta^2 + A_{11}^* \beta^4 \right] V_{32} V_{31} + \alpha \beta (C_{21}^* + C_{12}^* + 2C_{66}^*) \right\} \\ + \alpha \beta \left[(L_{12}^* + L_{21}^* + 2L_{66}^*) \lambda^2 - 2(F_{12}^* + F_{21}^* + 2F_{66}^* + \bar{F}_{12}^* + \bar{F}_{21}^* + 2\bar{F}_{66}^*) \lambda \right] \right\},$$

$$L_{24} = -\frac{4(V_{11} \alpha^4 A_{22}^* + \alpha^2 \beta^2 (V_{11} + V_{21}) A_{12}^* + \beta^4 V_{21} A_{11}^*) V_{31} \delta_n \delta_m}{3 \beta \alpha},$$

$$L_{25} = -\frac{(B_{11}^* - C_{11}^* \lambda) \delta_n \delta_m}{\beta}, L_{26} = -\frac{(\alpha^2 A_{22}^* + \beta^2 A_{12}^*) V_{31} \delta_n \delta_m}{\beta \alpha},$$

$$L_{27} = \frac{\left[(\Phi_{4x} - C_{11}^* \Phi_{1x} - C_{21}^* \Phi_{1y}) \lambda + B_{21}^* \Phi_{1y} + B_{11}^* \Phi_{1x} - \Phi_{2x} \right] \delta_m \delta_n}{\beta},$$

$$\Upsilon_{23} = \frac{ab}{4} \left\{ \left[A_{22}^* \alpha^4 + \beta^4 A_{11}^* + \alpha^2 \beta^2 (2A_{12}^* + A_{66}^*) \right] V_{32}^2 + \left[\lambda^2 L_{22}^* - (F_{22}^* + \bar{F}_{22}^*) \lambda + C_{22}^* \right] \beta^2 + \right\} \\ + \left[\lambda^2 L_{66}^* - (F_{66}^* + \bar{F}_{66}^*) \lambda + C_{66}^* \right] \alpha^2 + 9J_{55} \lambda^2 - 6I_{55} \lambda + H_{55} \right\},$$

$$\Upsilon_{24} = -\frac{4(V_{11} \alpha^4 A_{22}^* + \alpha^2 \beta^2 (V_{11} + V_{21}) A_{12}^* + \beta^4 V_{21} A_{11}^*) V_{32} \delta_n \delta_m}{3 \beta \alpha}, \Upsilon_{25} = \frac{(C_{12}^* \lambda - B_{12}^*) \delta_m \delta_n}{\alpha},$$

$$\Upsilon_{26} = -\frac{V_{32} (\alpha^2 A_{22}^* + \beta^2 A_{12}^*) \delta_m \delta_n}{\alpha \beta},$$

$$\Upsilon_{27} = \frac{\left[(-C_{12}^* \Phi_{1x} - C_{22}^* \Phi_{1y} + \Phi_{4y}) \lambda + B_{22}^* \Phi_{1y} + B_{12}^* \Phi_{1x} - \Phi_{2y} \right] \delta_m \delta_n}{\alpha},$$

$$C_{11}^* = -B_{11} B_{11}^* - B_{12} B_{21}^* + C_{11}, C_{12}^* = -B_{11} B_{12}^* - B_{12} B_{22}^* + C_{12}, C_{66}^* = -B_{66} B_{66}^* + C_{66},$$

$$C_{21}^* = -B_{12} B_{11}^* - B_{22} B_{21}^* + C_{12}, C_{22}^* = -B_{12} B_{12}^* - B_{22} B_{22}^* + C_{22},$$

$$\begin{aligned}
F_{11}^* &= -B_{11}D_{11}^* - B_{12}D_{21}^* + F_{11}, F_{12}^* = -B_{11}D_{12}^* - B_{12}D_{22}^* + F_{12}, F_{66}^* = -B_{66}D_{66}^* + F_{66}, \\
F_{21}^* &= -B_{12}D_{11}^* - B_{22}D_{21}^* + F_{12}, F_{22}^* = -B_{12}D_{12}^* - B_{22}D_{22}^* + F_{22}, \\
\bar{F}_{11}^* &= -D_{11}B_{11}^* - D_{12}B_{21}^* + F_{11}, \bar{F}_{12}^* = -D_{11}B_{12}^* - D_{12}B_{22}^* + F_{12}, \bar{F}_{66}^* = -D_{66}B_{66}^* + F_{66}, \\
\bar{F}_{21}^* &= -D_{12}B_{11}^* - D_{22}B_{21}^* + F_{12}, \bar{F}_{22}^* = -D_{12}B_{12}^* - D_{22}B_{22}^* + F_{22}, \\
L_{11}^* &= -D_{11}D_{11}^* - D_{12}D_{21}^* + L_{11}, L_{12}^* = -D_{11}D_{12}^* - D_{12}D_{22}^* + L_{12}, L_{66}^* = -D_{66}D_{66}^* + L_{66}, \\
L_{21}^* &= -D_{12}D_{11}^* - D_{22}D_{21}^* + L_{12}, L_{22}^* = -D_{12}D_{12}^* - D_{22}D_{22}^* + L_{22}.
\end{aligned}$$

Đối với các trường hợp panel FFFF, các điều kiện $N_{0y} = 0$ và $N_{0x} = -P_x h$ được áp dụng vào các phương trình (3.31-3.33). Ngoài ra, đối với các trường hợp panel FIFI, các ràng buộc biên được áp dụng bằng cách kết hợp phương trình (3.24) với (3.31-3.33), phương trình (3.31-3.33) có thể được viết lại thành:

$$\begin{aligned}
&\left(\Psi_{11} - 9\frac{\Psi_{20}\Upsilon_{11}}{\Upsilon_{16}}\right)W + \left(\Psi_{12} - 9\frac{\Psi_{20}\Upsilon_{12}}{\Upsilon_{16}}\right)\Phi_x + \left(\Psi_{13} - 9\frac{\Psi_{20}\Upsilon_{13}}{\Upsilon_{16}}\right)\Phi_y \\
&+ \Psi_{15}\Phi_y(h\xi + W) - 9\frac{\Psi_{20}\Upsilon_{14}}{\Upsilon_{16}}W(2h\xi + W) + \Psi_{14}\Phi_x(h\xi + W) \\
&+ \Psi_{16}W\left(W + \frac{4h\xi}{3}\right) - P_x h\left(\Psi_{18} - 9\frac{\Psi_{20}\Upsilon_{15}}{\Upsilon_{16}}\right) - \Psi_{22}q - \Psi_{23} \\
&+ \Psi_{17}W(2h\xi + W)(h\xi + W) - \Psi_{19}P_x h(h\xi + W) - 9\frac{\Psi_{20}\Upsilon_{17}}{\Upsilon_{16}} = -\Psi_{24}\ddot{W} - \Psi_{25}\kappa\dot{W},
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\Psi_{12} - 9\frac{L_{26}\Upsilon_{11}}{\Upsilon_{16}}\right)W + \left(L_{22} - 9\frac{L_{26}\Upsilon_{12}}{\Upsilon_{16}}\right)\Phi_x + \left(L_{23} - 9\frac{L_{26}\Upsilon_{13}}{\Upsilon_{16}}\right)\Phi_y \\
&+ \left(L_{24} - 9\frac{L_{26}\Upsilon_{14}}{\Upsilon_{16}}\right)W(2h\xi + W) - P_x h\left(L_{25} - 9\frac{L_{26}\Upsilon_{15}}{\Upsilon_{16}}\right) - 9\frac{L_{26}\Upsilon_{17}}{\Upsilon_{16}} - L_{27} = 0,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\Psi_{13} - 9\frac{\Upsilon_{26}\Upsilon_{11}}{\Upsilon_{16}}\right)W + \left(L_{23} - 9\frac{\Upsilon_{26}\Upsilon_{12}}{\Upsilon_{16}}\right)\Phi_x + \left(\Upsilon_{23} - 9\frac{\Upsilon_{26}\Upsilon_{13}}{\Upsilon_{16}}\right)\Phi_y \\
&+ \left(\Upsilon_{24} - 9\frac{\Upsilon_{26}\Upsilon_{14}}{\Upsilon_{16}}\right)W(2h\xi + W) - P_x h\left(\Upsilon_{25} - 9\frac{\Upsilon_{26}\Upsilon_{15}}{\Upsilon_{16}}\right) - 9\frac{\Upsilon_{26}\Upsilon_{17}}{\Upsilon_{16}} - \Upsilon_{27} = 0,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

trong đó $9=0$ đối với panel FFFF và $9=1$ với panel FIFI.

Bằng cách giải Φ_x, Φ_y từ (3.35) và (3.36), sau đó thế chúng vào (3.34), phương trình chuyển động của panel nhận được:

$$\begin{aligned}
& (\Xi_{11} + 9\Xi_{18}\Lambda_{32})W + (\Xi_{12} + 9\Xi_{19}\Lambda_{34})(h\xi + W) + (\Xi_{13} + 9\Xi_{19}\Lambda_{32})W(h\xi + W) \\
& + \Psi_{16}W\left(W + \frac{4}{3}h\xi\right) + (\Xi_{15} + 9\Xi_{19}\Lambda_{31})W(2h\xi + W)(h\xi + W) - P_x h(\Xi_{16} + 9\Xi_{18}\Lambda_{33}) \\
& - P_x h(\Xi_{17} + 9\Xi_{19}\Lambda_{33})(h\xi + W) + (\Xi_{14} + 9\Xi_{18}\Lambda_{31})W(2h\xi + W) \\
& + \Xi_{20} + 9\Xi_{18}\Lambda_{34} + \Psi_{24}\ddot{W} + \Psi_{25}\kappa\dot{W} = \Psi_{22}q,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
\Xi_{11} &= \Psi_{12}\Lambda_{14} + \Psi_{13}\Lambda_{24} + \Psi_{11}, & \Xi_{12} &= \Psi_{14}\Lambda_{15} + \Psi_{15}\Lambda_{25}, \\
\Xi_{13} &= \Psi_{14}\Lambda_{14} + \Psi_{15}\Lambda_{24}, & \Xi_{14} &= \Psi_{12}\Lambda_{11} + \Psi_{13}\Lambda_{21}, \\
\Xi_{15} &= \Psi_{14}\Lambda_{11} + \Psi_{15}\Lambda_{21} + \Psi_{17}, & \Xi_{16} &= \Psi_{12}\Lambda_{13} + \Psi_{13}\Lambda_{23} + \Psi_{18}, \\
\Xi_{17} &= \Psi_{14}\Lambda_{13} + \Psi_{15}\Lambda_{23} + \Psi_{19}, & \Xi_{18} &= \Psi_{12}\Lambda_{12} + \Psi_{13}\Lambda_{22} + \Psi_{20}, \\
\Xi_{19} &= \Psi_{14}\Lambda_{12} + \Psi_{15}\Lambda_{22}, & \Xi_{20} &= \Psi_{12}\Lambda_{15} + \Psi_{13}\Lambda_{25} - \Psi_{23} \\
\Lambda_{11} &= \frac{\Upsilon_{23}L_{24} - \Upsilon_{24}L_{23}}{-\Upsilon_{23}L_{22} + L_{23}^2}, & \Lambda_{12} &= -\frac{-\Upsilon_{23}L_{26} + \Upsilon_{26}L_{23}}{-\Upsilon_{23}L_{22} + L_{23}^2}, & \Lambda_{13} &= -\frac{-\Upsilon_{23}L_{25} + \Upsilon_{25}L_{23}}{-\Upsilon_{23}L_{22} + L_{23}^2}, \\
\Lambda_{14} &= -\frac{-\Upsilon_{23}\Psi_{12} + \Psi_{13}L_{23}}{-\Upsilon_{23}L_{22} + L_{23}^2}, & \Lambda_{15} &= \frac{-\Upsilon_{23}L_{27} + \Upsilon_{27}L_{23}}{-\Upsilon_{23}L_{22} + L_{23}^2}, & \Lambda_{21} &= -\frac{-\Upsilon_{24}L_{22} + L_{23}L_{24}}{-\Upsilon_{23}L_{22} + L_{23}^2}, \\
\Lambda_{22} &= \frac{\Upsilon_{26}L_{22} - L_{23}L_{26}}{-\Upsilon_{23}L_{22} + L_{23}^2}, & \Lambda_{23} &= \frac{\Upsilon_{25}L_{22} - L_{23}L_{25}}{-\Upsilon_{23}L_{22} + L_{23}^2}, & \Lambda_{24} &= \frac{-\Psi_{12}L_{23} + \Psi_{13}L_{22}}{-\Upsilon_{23}L_{22} + L_{23}^2}, \\
\Lambda_{25} &= \frac{-\Upsilon_{27}L_{22} + L_{23}L_{27}}{-\Upsilon_{23}L_{22} + L_{23}^2}, & \Lambda_{31} &= -\frac{\Upsilon_{12}\Lambda_{11} + \Upsilon_{13}\Lambda_{21} + \Upsilon_{14}}{\Upsilon_{12}\Lambda_{12} + \Upsilon_{13}\Lambda_{22} + \Upsilon_{16}}, \\
\Lambda_{32} &= -\frac{\Upsilon_{12}\Lambda_{14} + \Upsilon_{13}\Lambda_{24} + \Upsilon_{11}}{\Upsilon_{12}\Lambda_{12} + \Upsilon_{13}\Lambda_{22} + \Upsilon_{16}}, & \Lambda_{33} &= -\frac{\Upsilon_{12}\Lambda_{13} + \Upsilon_{13}\Lambda_{23} + \Upsilon_{15}}{\Upsilon_{12}\Lambda_{12} + \Upsilon_{13}\Lambda_{22} + \Upsilon_{16}}, & \Lambda_{34} &= -\frac{\Upsilon_{12}\Lambda_{15} + \Upsilon_{13}\Lambda_{25} + \Upsilon_{17}}{\Upsilon_{12}\Lambda_{12} + \Upsilon_{13}\Lambda_{22} + \Upsilon_{16}}.
\end{aligned}$$

Bỏ qua các thành phần phi tuyến, thành phần cản, tải cưỡng bức và độ không hoàn hảo trong biểu thức (3.37), thu được phương trình dao động tự do tuyến tính. Tiếp theo, tần số dao động tự do tuyến tính của panel hoàn hảo tìm được như sau:

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{\Xi_{11} + \Xi_{12} + 9(\Xi_{18}\Lambda_{32} + \Xi_{19}\Lambda_{34})}{\Psi_{24}}}. \tag{3.38}$$

Để phân tích dao động cưỡng bức, tải điều hòa được xem xét dưới dạng hàm sin theo thời gian $q = Q\sin\Omega t$.

Thế dạng nghiệm điều hòa $W = \eta\sin(\Omega t)$ vào phương trình (3.37), đưa vào tham số tần số không thứ nguyên $\nu = \Omega/\omega_{mn}$ và áp dụng phương pháp cân bằng điều hòa, mối quan hệ biên độ-tần số của dao động cưỡng bức phi tuyến thu được sau một số phép biến đổi toán học đơn giản như sau:

$$\nu = \frac{\Psi_{25}\kappa}{\Psi_{24}\pi\omega_{mn}} + \sqrt{1 + \frac{3(\Xi_{15} + 9T_{19}\Lambda_{31})\eta^2}{4\Psi_{24}\omega_{mn}^2} + \frac{8[\Xi_{13} + \Xi_{14} + 9(\Xi_{19}\Lambda_{32} + \Xi_{18}\Lambda_{31}) + \Psi_{16}]\eta}{3\Psi_{24}\pi\omega_{mn}^2} + \frac{4(\Xi_{20} + 9\Xi_{18}\Lambda_{34})}{\Psi_{24}\pi\eta\omega_{mn}^2} - \frac{\Psi_{22}Q}{\Psi_{24}\eta\omega_{mn}^2} - \left(\frac{\Psi_{25}\kappa}{\Psi_{24}\pi\omega_{mn}}\right)^2} \quad (3.39)$$

Phương trình (3.39) là mối quan hệ biên độ-tần số ở dạng tường minh, vì vậy, có thể sử dụng phương trình này để xác định các đường cong biên độ-tần số tự do và cường độ của panel.

Liên hệ tải trọng-độ võng sau mất ổn định tĩnh có thể nhận được bằng cách bỏ qua các thành phần cản và quán tính trong biểu thức (3.37).

Đối với panel FFFF, hoàn hảo, không gân và đối xứng, bằng cách bỏ qua các thành phần quán tính, cản, độ không hoàn hảo và các thành phần phi tuyến trong biểu thức (3.37), tải mất ổn định tĩnh của panel nhận được bằng cách cho $W \rightarrow 0$ như sau:

$$P_{xupper} = \frac{\Xi_{11} + \Xi_{12}}{h\Xi_{17}}. \quad (3.40)$$

Phương trình (3.37) là phương trình vi phân phi tuyến bậc hai theo thời gian, được giải bằng cách sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc bốn để thu được đáp ứng động của panel.

Đối với phân tích mất ổn định động, tải nén dọc trục được xem xét như một hàm tuyến tính theo thời gian $P_x = \zeta t$, với tốc độ tải lớn ζ (Pa/s).

Thời điểm tới hạn t_{cr}^{dyn} được xác định bằng cách áp dụng tiêu chuẩn Budiansky-Roth, tại điểm uốn trong vùng mất ổn định của đường cong đáp ứng động, tức là:

$$\left. \frac{d^2W}{dt^2} \right|_{t=t_{cr}^{dyn}} = 0. \quad (3.41)$$

Tải tới hạn động được xác định bởi $P_{cr}^{dyn} = \zeta t_{cr}^{dyn}$.

3.4. Kết quả số và thảo luận

3.4.1. Kết quả so sánh

Để kiểm nghiệm lại các kết quả đã thu được ở trên, các so sánh tần số không thứ nguyên của các panel XC FG-CNTRC không gân với nghiên cứu của Shen and Xiang [131] được trình bày trong Bảng 3.1. Các kết quả phù hợp với sự khác biệt nhỏ giữa kết quả của luận án và của tác giả khác.

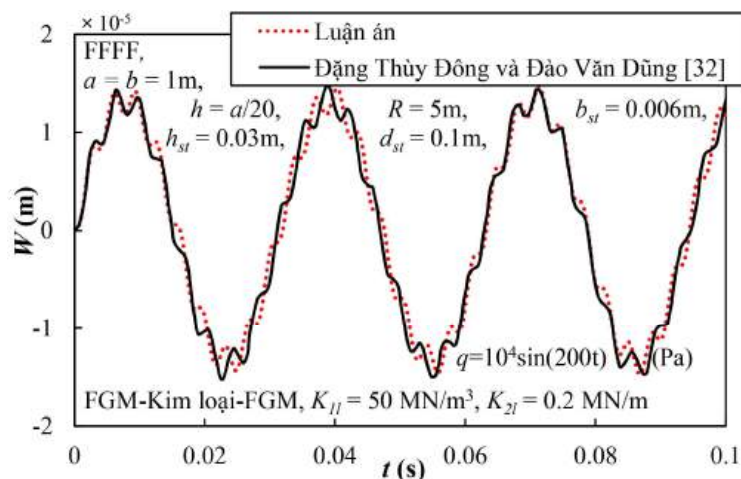
Bảng 3.1. So sánh tần số không thứ nguyên $\tilde{\omega} = \omega_{mn} \left(a^2/h \right) \sqrt{\rho_M/E_M}$ đối với panel XC FG-CNTRC không gân (FFFF, $h=1$ mm, $b/h=20$, $a/R=0.5$, $a/b=1$, $\Delta T=0K$, $m=n=1$).

V_{CNT}^*	Nguồn	UD	FG-X	FG-V	FG-A
0.12	Shen and Xiang [131]	16.5485	20.4249	14.8046	15.0880
	Luận án	16.5749	18.7735	14.8249	14.6058
0.17	Shen and Xiang [131]	20.4005	25.1015	18.2180	18.4493
	Luận án	20.4326	23.1967	18.2509	17.9783
0.28	Shen and Xiang [131]	23.9878	30.0123	21.4053	22.2429
	Luận án	24.0243	26.9747	21.4730	21.3058

Bảng 3.2. Các thông số tần số cơ bản $\tilde{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \left(a^2/h \right) \sqrt{\rho_0/E_0}$ của panel trụ FG-GRC không gân ((0/90/0/90/0)_s, FFFF, $a/b=1$, $h=2$ mm, $a/R=0.5$, $b/h=20$, $m=n=1$)

T (K)	Phân bố	Shen và các cộng sự [136]	Luận án
300	UD	38.0071	38.0804
	FG-X	39.5231	39.6005
	FG-V	34.6249	34.6964
	FG- Λ	36.2314	36.3017
	FG-O	33.8763	33.9400
400	UD	35.3452	35.4113
	FG-X	36.4831	36.5527
	FG-V	32.7796	32.8433
	FG- Λ	33.3561	33.1578
	FG-O	31.4769	31.5344

Trong Bảng 3.2, kết quả của luận án về tần số cơ bản không thứ nguyên được so sánh với kết quả của Shen và các cộng sự [136] của panel trụ FG-GRC (0/90/0/90/0)_s trong môi trường nhiệt. Tiếp theo, đáp ứng dao động phi tuyến của panel trụ FGM sandwich được so sánh với kết quả của Đặng Thùy Đông và Đào Văn Dũng [32] trong Hình 3.3. Có thể thấy rằng, các kết quả nhận được đều cho thấy với những khác biệt rất nhỏ giữa kết quả của luận án và kết quả trước đó.



Hình 3.3. So sánh đáp ứng dao động phi tuyến của panel trụ FGM sandwich với Đặng Thùy Đông và Đào Văn Dũng [32]

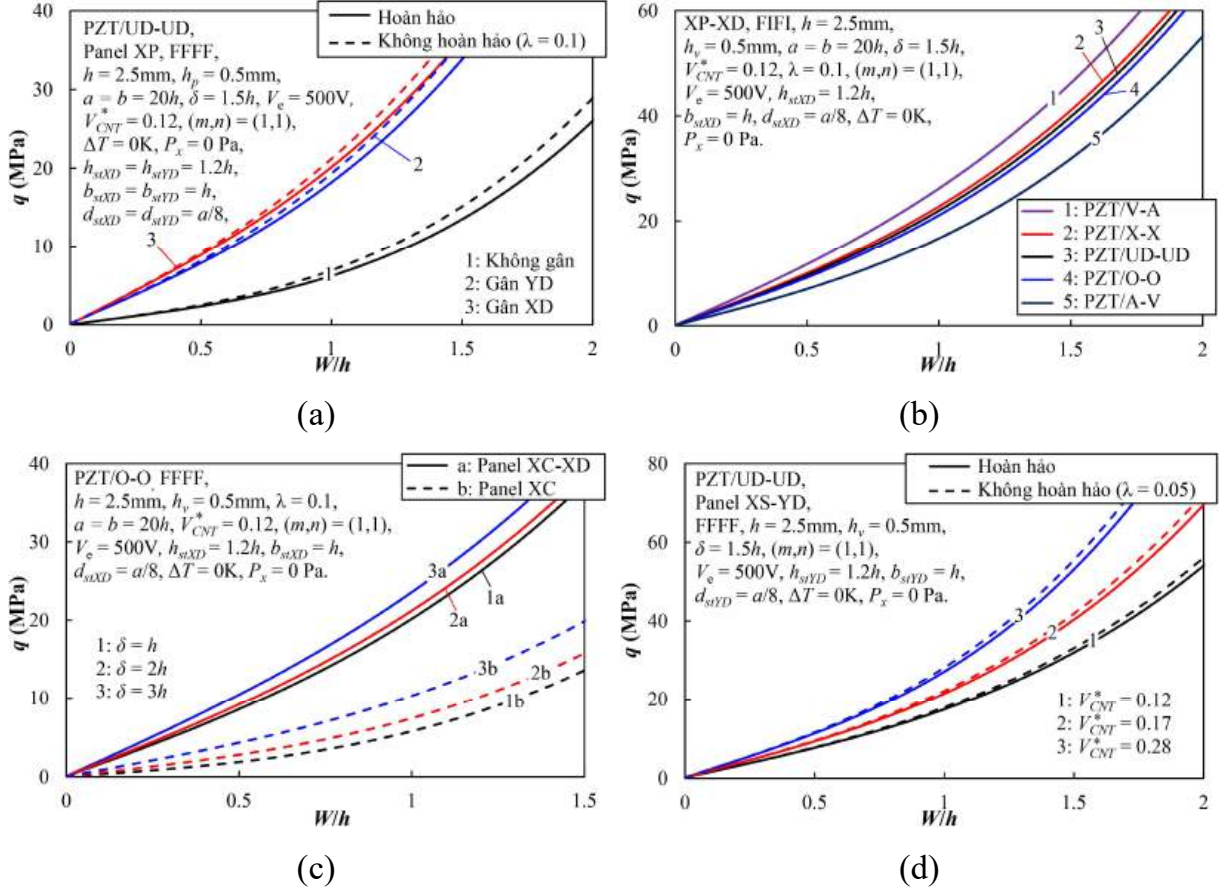
3.4.2. Bài toán 1: Ổn định và động lực phi tuyến của panel FG-CNTRC có gân tăng cứng và lớp áp điện

Ở bài toán này, các ví dụ số được nghiên cứu với vật liệu nền Poly(methyl methacrylate) (PMMA) được gia cường bằng CNT và PZT-5A được chọn cho các lớp áp điện. Các tính chất vật liệu của nền, CNT và PZT-5A được chọn theo các công trình trước đây (Wang và Shen [161, 162]; Shen [123]). Mô hình kết cấu và vật liệu được chọn như trong mục 3.1.1.

Hình 3.4 thể hiện tác động của hướng đặt gân, quy luật phân bố và tỷ phần thể tích CNT, độ nâng, nhiệt độ môi trường và khoảng cách gân tới đường cong sau mất ổn định tĩnh của panel chịu áp lực ngoài. Trong Hình 3.4a có thể thấy ảnh hưởng của gân FG-CNTRC và hướng của gân, rõ ràng rằng khả năng chịu tải của panel có gân vượt trội so với panel không gân cả ở miền độ võng lớn và miền độ võng nhỏ, trong cả trường hợp panel hoàn hảo và không hoàn hảo. Tác động của các quy luật phân bố CNT được thể hiện trong Hình 3.4b. Panel có quy luật phân bố loại 4 thể hiện vượt trội khi xét tới khả năng chịu tải so với các quy luật phân bố khác khi phần lớn CNT tập trung ở bề mặt trên cùng của panel và mặt dưới cùng của gân, sự phân bố CNT này cải thiện vượt trội độ cứng của hệ panel và gân.

Ngược lại với quy luật phân bố loại 5, khi phần lớn CNT tập trung ở vùng giữa hệ panel và gân, khả năng chịu tải của hệ giảm rất mạnh. Hình 3.4c khảo sát ảnh hưởng của độ nâng tới khả năng chịu tải của panel chịu áp lực ngoài. Như quan sát được trên hình, khi độ nâng tăng, đường cong sau mất ổn định được nâng cao rõ ràng trong cả trường

hợp vỏ có gân và không gân. Cũng có thể thấy rằng ảnh hưởng của độ nâng rõ ràng hơn đáng kể trong trường hợp panel không gân. Tỷ phần thể tích của CNT cũng ảnh hưởng rất mạnh tới ứng xử sau mất ổn định của panel chịu áp lực ngoài như thể hiện trong Hình 3.4d. Khi tỷ phần thể tích CNT tăng lên thì khả năng chịu tải của panel tăng đáng kể, đặc biệt ở vùng độ võng lớn.

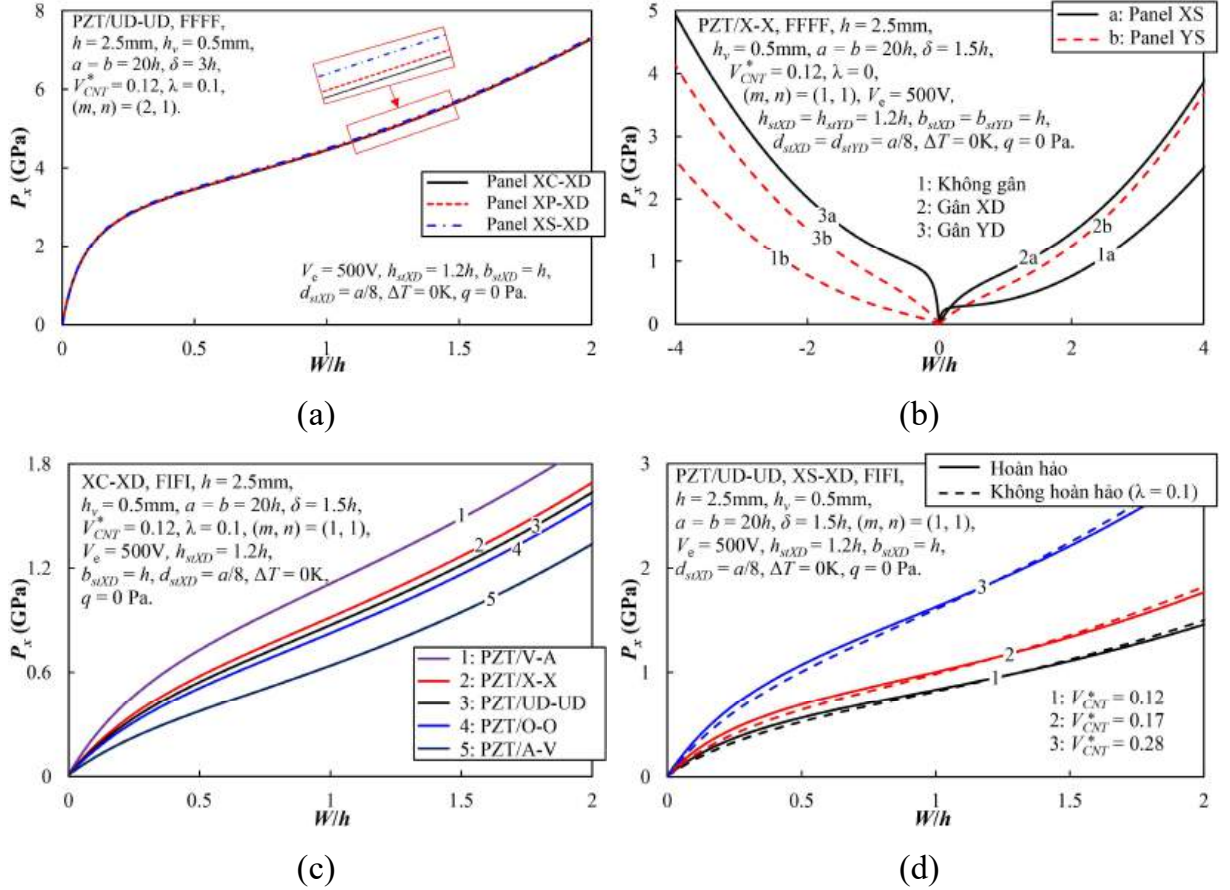


Hình 3.4. Ảnh hưởng của hướng của gân, quy luật phân bố và tỷ phần thể tích CNT, độ nâng, nhiệt độ môi trường, và khoảng cách gân tới đường cong sau mất ổn định tĩnh của panel chịu áp lực ngoài

Ảnh hưởng của loại panel, hướng của gân, quy luật phân bố và tỷ phần thể tích CNT, độ nâng và nhiệt độ môi trường tới đường cong sau mất ổn định tĩnh của panel chịu nén dọc trục được khảo sát trong Hình 3.5. Ảnh hưởng rất nhỏ của loại panel tới ứng xử sau mất ổn định của panel chịu tải nén dọc trục có thể thấy như trong hình 3.5a. Tuy nhiên, đường cong sau mất ổn định của panel hình sin vẫn hơn một chút so với hai loại panel còn lại.

Các xu hướng trái ngược của đường cong sau mất ổn định của panel không gân, có gân theo phương x và phương y với hai hướng đặt CNT có thể quan sát được trong

hình 3.5b, trong khảo sát này, đường cong sau mất ổn định của panel có thể xác định ở miền độ võng âm và dương. Hình 3.5c và 3.5d khảo sát ảnh hưởng của quy luật phân bố và tỷ phần thể tích của CNT tới ứng xử sau mất ổn định của panel chịu nén dọc trục. Ảnh hưởng rõ rệt và thứ tự của khả năng chịu tải sau mất ổn định của panel có thể quan sát được tương ứng với trường hợp panel chịu áp lực ngoài.



Hình 3.5. Ảnh hưởng của loại panel, hướng của gân, quy luật phân bố và tỷ phần thể tích CNT, độ nâng và nhiệt độ môi trường tới đường cong sau mất ổn định tĩnh của panel chịu nén dọc trục

Bảng 3.3 cho thấy tải trọng mất ổn định tới hạn tĩnh và động của các panel XC, XP và XS hoàn hảo không gân theo các quy luật phân bố FG-X, UD và FG-O. Tải trọng nén dọc trục được xem xét ở bài toán này có dạng hàm tuyến tính theo thời gian. Rõ ràng, tải trọng mất ổn định tới hạn tĩnh nhỏ hơn tải trọng mất ổn định tới hạn động và khi tốc độ tải tăng, tải trọng mất ổn định tới hạn động cũng tăng. Như có thể thấy, phân bố FG-X hiệu quả hơn các loại phân bố FG-O và UD khi xem xét tải trọng mất ổn định tới hạn động. Ngoài ra, tải trọng mất ổn định tới hạn động của các panel XS không gân lớn hơn một chút so với các panel XC và XP không gân.

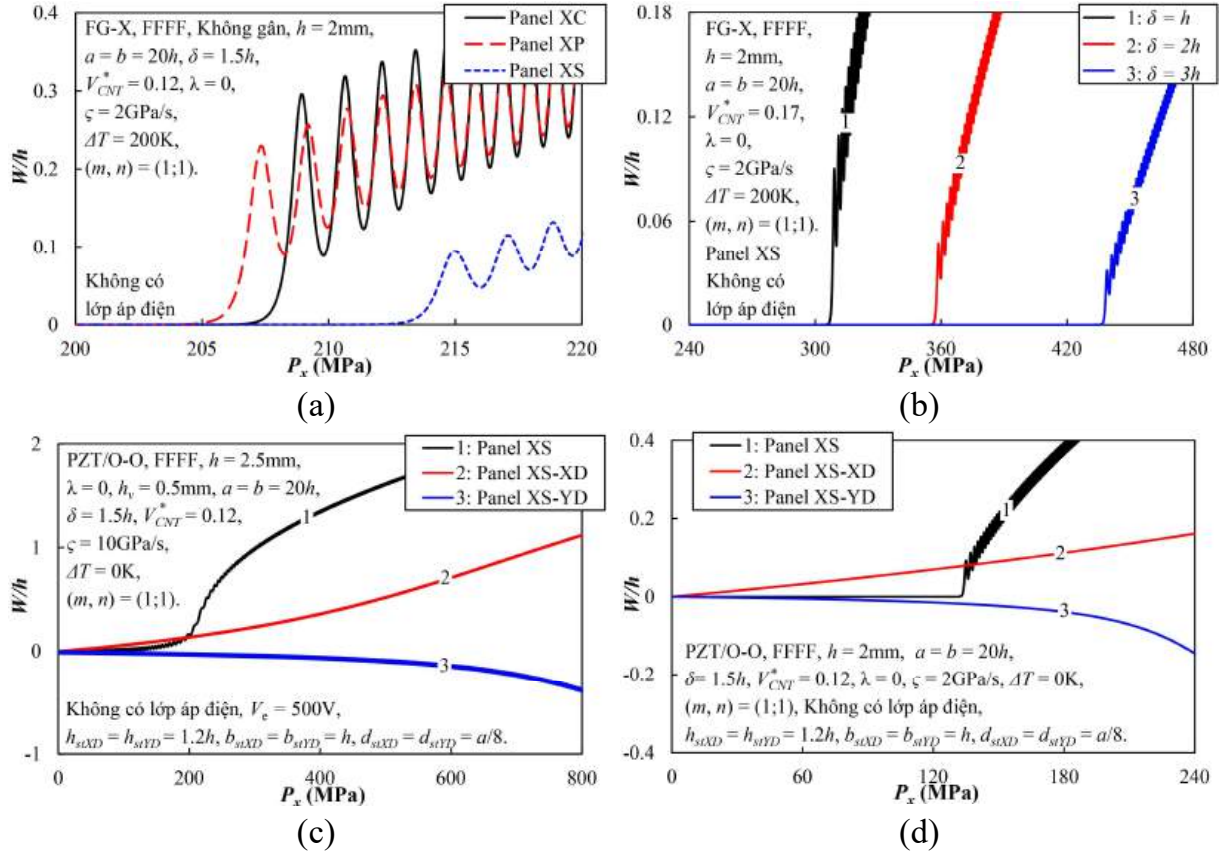
Bảng 3.3. Tải trọng tới hạn mất ổn định động (MPa) của các panel FG-CNTRC không gân và không có lớp áp điện (FFFF, $\lambda = 0$, $\delta = 1.5h$, $h = 2\text{mm}$, $a = b = 20h$, $V_{CNT}^* = 0.12$, $\Delta T = 200\text{K}$, $m = n = 1$).

	Kiểu	Tĩnh	Động		
			$\varsigma = 1$ (GPa /s)	$\varsigma = 2$ (GPa /s)	$\varsigma = 3$ (GPa /s)
UD	Panel XS	167.579	171.700	174.120	176.310
	Panel XP	159.818	163.900	166.600	168.540
	Panel XC	159.723	163.800	166.420	168.810
FG-X	Panel XS	209.174	213.300	216.000	218.280
	Panel XP	201.410	205.500	208.200	210.300
	Panel XC	201.315	205.400	208.000	210.690
FG-O	Panel XS	112.104	116.200	118.660	120.810
	Panel XP	104.340	108.400	111.140	113.280
	Panel XC	104.245	108.300	110.980	113.010

Đáp ứng mất ổn định động của các panel XC, XP và XS hoàn hảo không gân dưới tải trọng nén dọc trục được xem xét trong Hình 3.6a. Có thể thấy các vùng mất ổn định động của các panel và biên độ cực đại của vùng mất ổn định của panel XS không gân nhỏ hơn đáng kể so với các panel XC và XP không gân. Các tác động của sự gia tăng mật phẳng giữa lên đáp ứng mất ổn định động của các panel XS không gân được thể hiện trong Hình 3.6b. Rõ ràng, tải trọng mất ổn định tới hạn động của các panel tăng lên đáng kể và độ võng cực đại của vùng mất ổn định giảm khi sự gia tăng mật phẳng giữa tăng lên. Hình 3.6c và 3.6d thể hiện đáp ứng mất ổn định động của các panel XS có gân và không gân. Trong khi các vùng mất ổn định động của các panel không gân được thể hiện là khá rõ ràng (có lớp áp điện) và rất rõ ràng (không có lớp áp điện), thì vùng mất ổn định động dường như không thể quan sát được đối với các panel có gân.

Hình 3.7a và 3.7b cho thấy tác động của các quy luật phân bố CNT lên đáp ứng mất ổn định động của các panel XS hoàn hảo không gân có và không có lớp áp điện. Vùng mất ổn định không xuất hiện trong trường hợp của các panel FG-V và FG-A trong cả hai trường hợp được xem xét. Ngoài ra, trong trường hợp của các panel có lớp áp điện, vùng mất ổn định không được hiển thị rõ ràng và ngược lại trong trường hợp của các panel không có lớp áp điện. Tác động của mô hình phân bố CNT lên đáp ứng mất

ổn định động của các panel có gân thể hiện ở Hình 3.7c. Một lợi thế nổi bật trong việc giảm biên độ đáp ứng mất ổn định động có thể được thấy đối với các panel PZT/V-A và ngược lại với panel PZT/A-V.

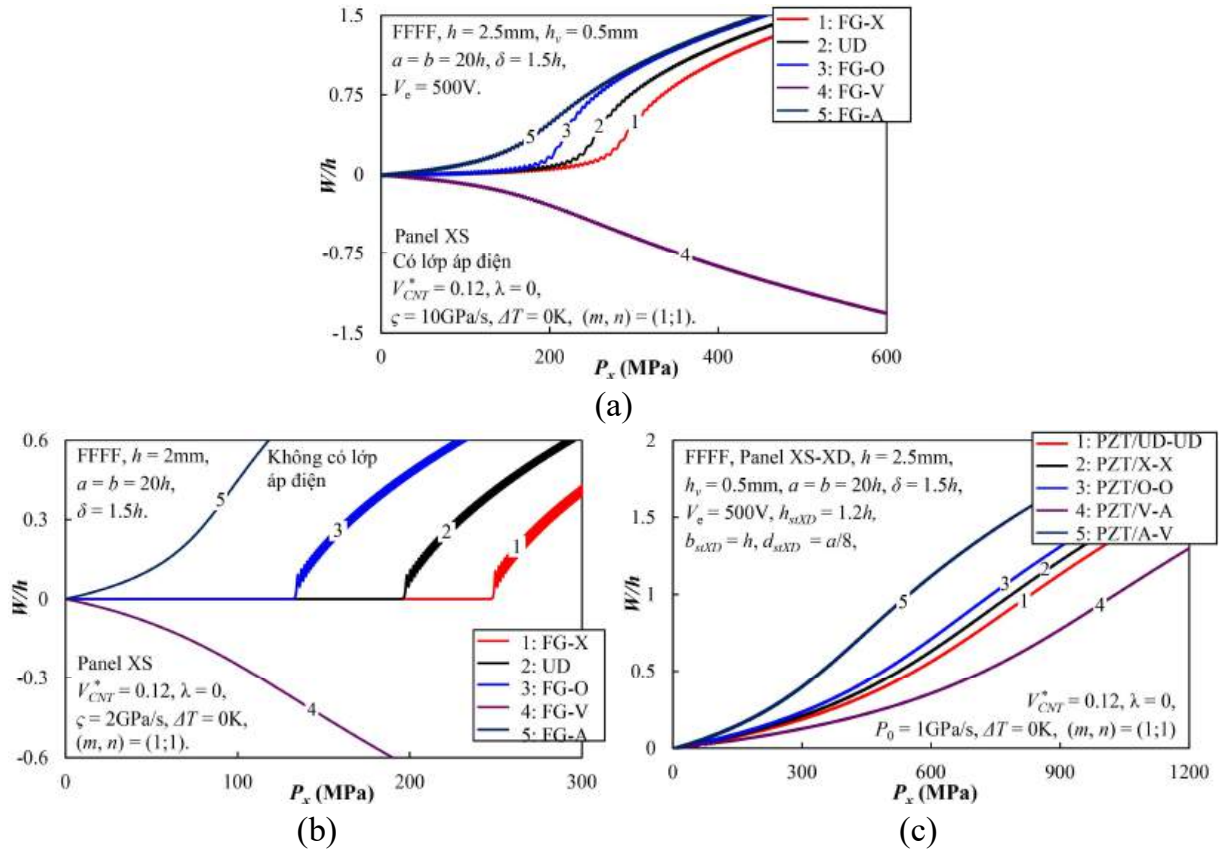


Hình 3.6. Ảnh hưởng của loại panel, độ nâng mặt phẳng giữa và hướng của gân đến đáp ứng mất ổn định động của panel có và không gân

Tác động của phân bố CNT, CNT và hướng của gân của các panel C, P và S có và không gân lên tần số cơ bản được chỉ ra ở Bảng 3.4. Với panel không gân, tần số cơ bản của panel XC và panel YC là như nhau, trong khi tần số cơ bản của panel XS và panel XP lớn hơn một chút so với tần số cơ bản của panel YS và panel YP. Từ đó cho thấy tác động của hướng CNT không lớn tới tần số cơ bản đối với các panel không gân. Tần số cơ bản của panel có gân cao hơn nhiều so với các panel không gân.

Ngoài ra, tần số cơ bản của các panel có cùng hướng của CNT và gân (panel X có gân XD và panel Y có gân YD) lớn hơn tần số của các panel có hướng vuông góc của CNT và gân (panel X có gân YD và panel Y có gân XD). Trong ba loại panel (panel C, P và S), tần số lớn nhất có thể thấy được với panel S cả khi có và không gân. Năm tổ hợp phân bố CNT cũng được tính đến trong bảng này, tần số cơ bản lớn nhất thu được với phân bố PZT/X-X cho các panel không gân. Ngược lại, do các phân bố CNT được

xem xét cho panel và gân, đối với các panel có gân, tần số cơ bản lớn nhất khi phân bố PZT/V-A.



Hình 3.7. Ảnh hưởng của quy luật phân bố CNT và mô hình phân bố của CNT đến đáp ứng mất ổn định động của các panel có và không gân.

Ứng xử động của các panel FG-CNTRC có gân được đề cập trong Hình 3.8a. Với cùng một độ nâng mặt phẳng giữa δ , có thể thấy được sự khác biệt nhỏ về biên độ dao động cho ba loại panel và biên độ của panel có gân XS-XD nhỏ hơn một chút so với hai panel còn lại. Có thể thấy được tác động của gân lên biên độ dao động của panel XP trong Hình 3.8b, biên độ dao động của panel XP giảm đáng kể khi có gân và gân XD hiệu quả hơn gân YD.

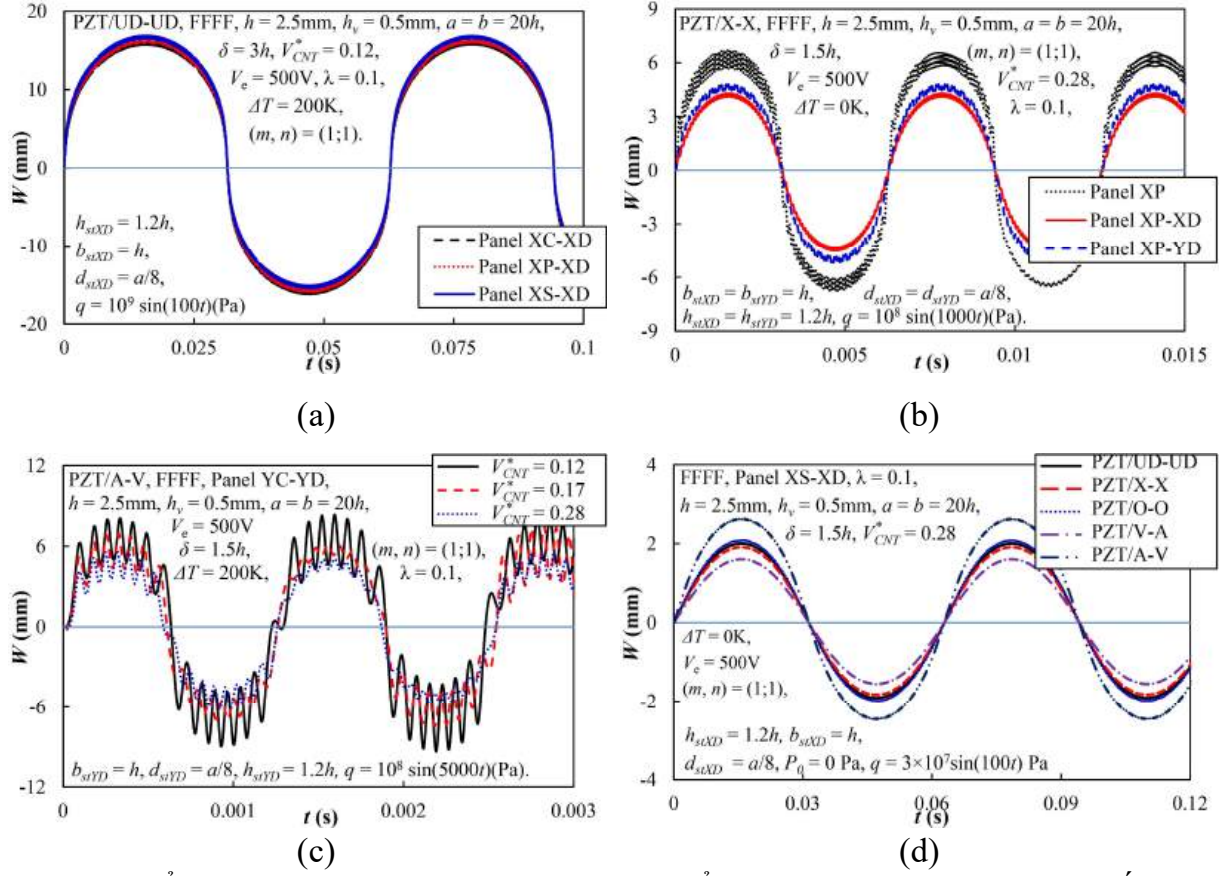
Tác động của tỷ lệ thể tích CNT lên ứng xử dao động của panel có gân YC-YD được nghiên cứu trong Hình 3.8c. Rõ ràng, biên độ dao động của các panel giảm mạnh khi tỷ lệ thể tích CNT tăng. Tác động của các tổ hợp phân bố khác nhau được xem xét lên ứng xử dao động của panel có gân XS-XD được trình bày trong Hình 3.8d. Có thể thấy, biên độ dao động của panel có gân PZT/V-A là nhỏ nhất, ngược lại, panel có gân PZT/A-V là lớn nhất.

Bảng 3.4. Ảnh hưởng của mô hình phân bố CNT và hướng của gân lên tần số cơ bản ω_{mn} (rad/s) của panel (FFFF, $\lambda = 0$, $\delta = 1.5h$, $h = 2.5\text{mm}$, $h_v = 0.5\text{mm}$, $a = b = 20h$, $V_{CNT}^* = 0.12$, $\Delta T = 200\text{K}$, $V_e = 500\text{V}$, $m = n = 1$, $h_{stXD} = h_{stYD} = 1.2h$, $b_{stXD} = b_{stYD} = h$, $d_{stXD} = d_{stYD} = a/8$).

		PZT/UD-UD	PZT/X-X	PZT/O-O	PZT/V-A	PZT/A-V
Không gân	Panel XS	20518.06	22003,98	18844.92	18913.48	20322.61
	Panel XP	20160.00	21669.89	18455.02	18517.40	19967.99
	Panel XC	20148.96	21659.56	18443.02	18504.69	19957.54
	Panel YS	20328.33	21827.41	18637.92	18710.39	20128.16
	Panel YP	20161.50	21671.31	18456.64	18519.30	19969.25
	Panel YC	20148.96	21659.56	18443.02	18504.69	19957.54
Gân XD	Panel XS	36889.80	37583.02	36068.64	40820.22	30860.34
	Panel XP	36677.15	37373.89	35851.44	40626.38	30606.85
	Panel XC	36672.84	37369.61	35847.05	40622.31	30601.77
	Panel YS	33755.70	34724.93	32518.80	33957.58	31569.59
	Panel YP	33632.28	34602.33	32393.12	33834.99	31436.52
	Panel YC	33632.22	34602.01	32393.30	33834.94	31436,35
Gân YD	Panel XS	33554.26	34431.90	32402.35	33660.64	31497.84
	Panel XP	33473.60	34350.33	32321.54	33579.71	31411.26
	Panel XC	33473.88	34350.32	32322.11	33579.94	31411.50
	Panel YS	37023.70	37812.54	36098.01	41250.74	30734.74
	Panel YP	36964.40	37753.93	36037.57	41195.28	30664.56
	Panel YC	36960.33	37749.89	36033.43	41191.40	30659.78

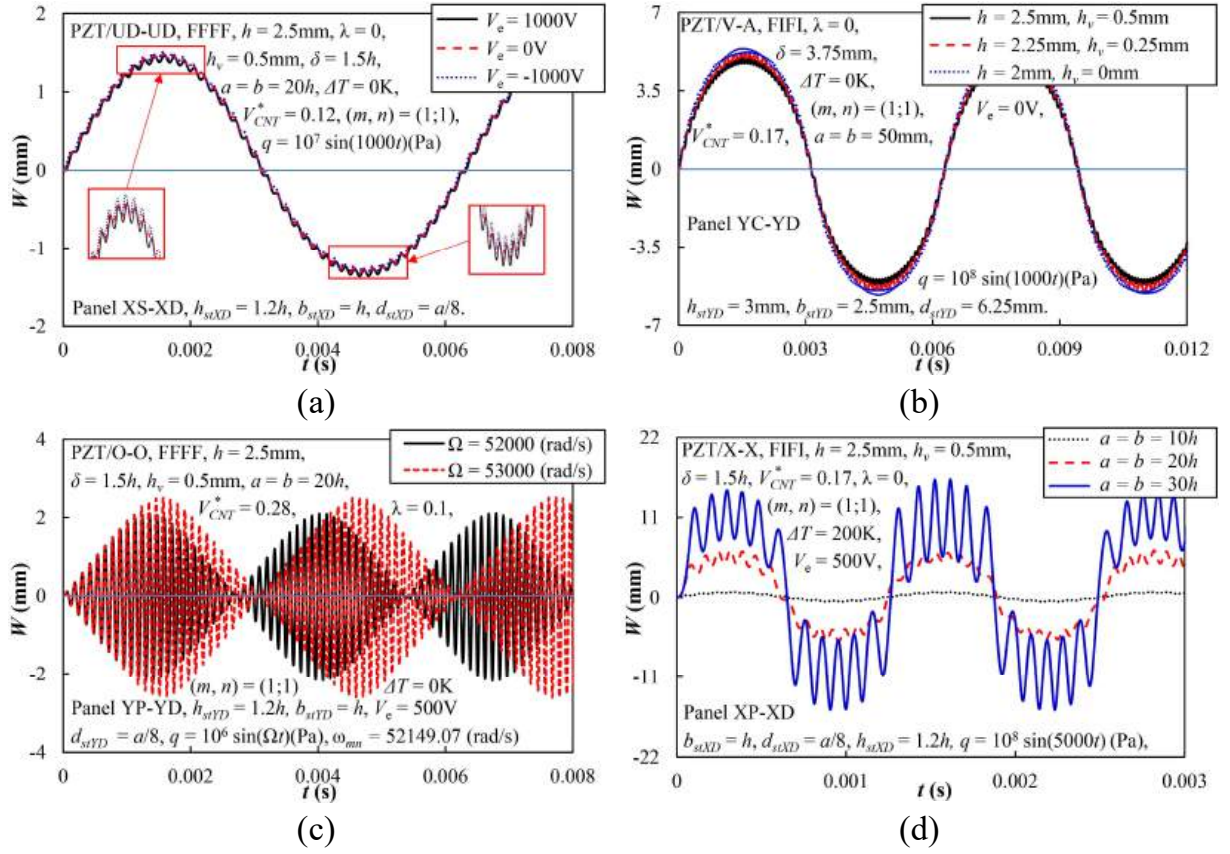
Hiệu ứng gây ra của điện áp của lớp áp điện và độ dày của lớp áp điện lên ứng xử dao động của panel có thể thấy được ở Hình 3.9a và 3.9b. Sự khác biệt nhỏ trong biên độ dao động của các panel được thể hiện khi áp dụng các giá trị điện áp khác nhau, trong khi đó, có thể quan sát thấy sự thay đổi lớn trong biên độ dao động của các panel khi độ dày của lớp áp điện thay đổi. Hiện tượng phách có thể được quan sát thấy trong Hình 3.9c khi tần số cưỡng bức tiếp cận tần số cơ bản của các panel có gân YP-YD trong cả hai trường hợp khi tần số cưỡng bức lớn hơn và nhỏ hơn tần số cơ bản. Việc tăng

chiều dài các cạnh của panel cũng làm tăng đáng kể biên độ dao động của panel có gân XP-XD như thể hiện ở Hình 3.9d, biên độ dao động tăng đáng kể khi chiều dài của các cạnh dọc và cạnh vòng tăng.

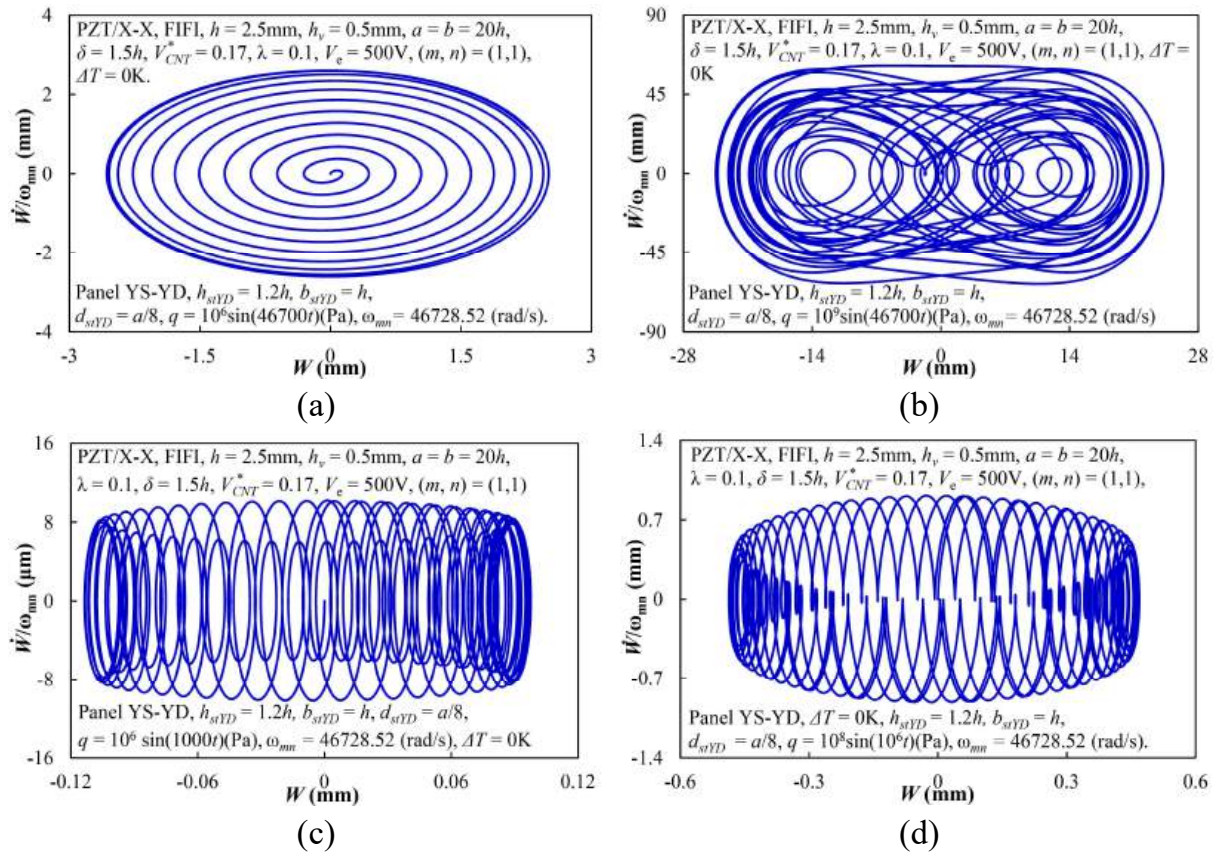


Hình 3.8. Ảnh hưởng của loại panel, gân, tỷ lệ thể tích CNT và mô hình phân bố CNT đến đáp ứng dao động của panel.

Đường cong độ võng-vận tốc của panel có gân YS-YD được xem xét trong Hình 3.10a – 3.10d. Tần số cưỡng bức tiếp cận tần số cơ bản của panel và vùng hấp dẫn của mặt phẳng pha được thể hiện rõ ràng với biên độ tải trọng cường bức nhỏ trong Hình 3.10a. Ngoài ra, vùng hấp dẫn chia thành hai khi biên độ tải trọng cường bức tăng lên như Hình 3.10b. Khi tần số cưỡng bức cách xa tần số cơ bản của panel như thể hiện trong Hình 3.10c và 3.10d, vùng hấp dẫn không được rõ ràng và các dạng khác nhau của đường cong độ võng-vận tốc với các tần số cường bức khác nhau đã được ghi nhận.



Hình 3.9. Ảnh hưởng của lớp áp điện và tần số cường bức đến đáp ứng dao động



Hình 3.10. Đường cong độ võng-vận tốc của các panel có gân YS-YD

3.4.3. Bài toán 2: Panel FG-GRC có gân tăng cứng trên nền đàn hồi

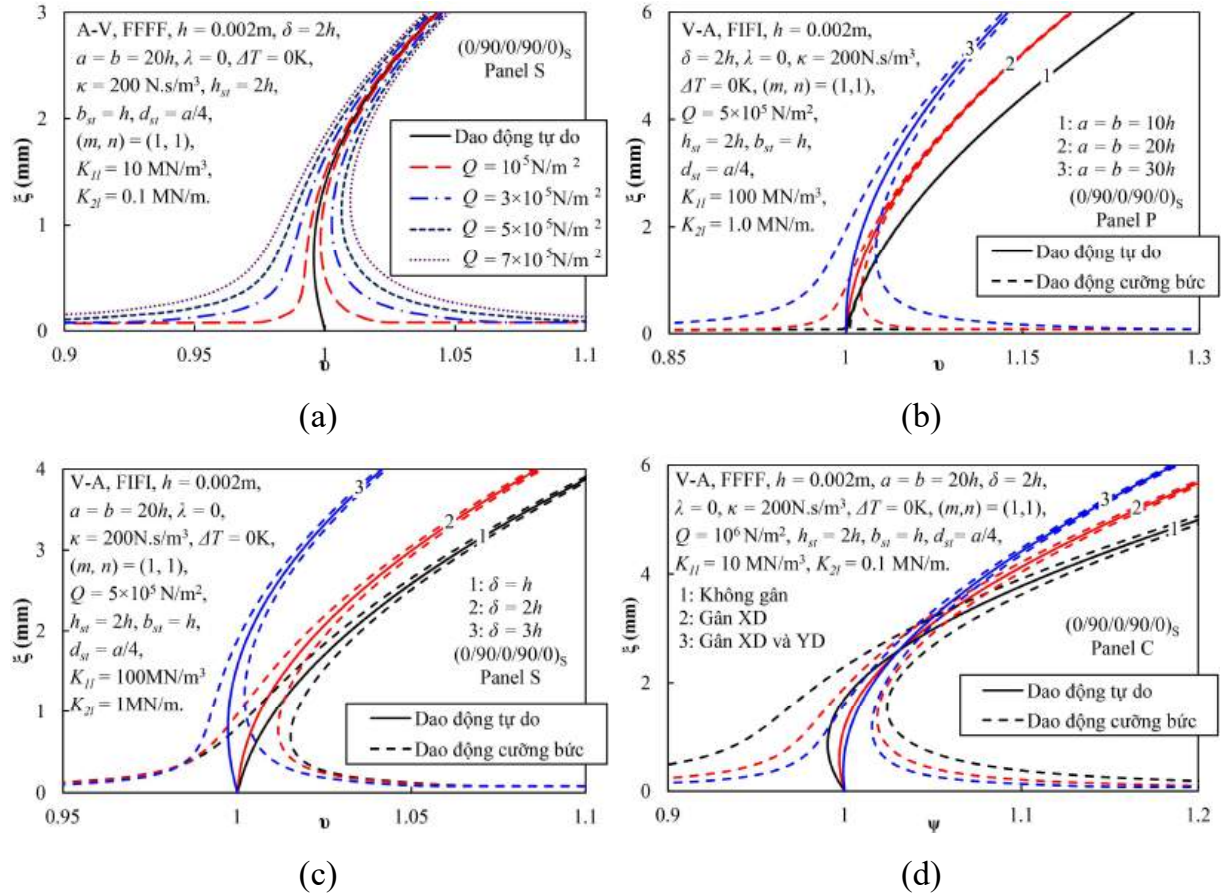
Mô hình vật liệu và hình học của panel FG-GRC có gân tăng cứng trên nền đàn hồi Pasternak của bài toán này được chọn như trong mục 3.1.2.

Bảng 3.5. Tần số cơ bản (rad/s) của $(0)_{10T}$ panel trụ, parabol và hình sin có gân và không gân (FFFF, $h = 0,002\text{m}$, $a = b = 20h$, $\delta = 2h$, $\lambda = 0$, $\Delta T = 100\text{K}$, $m = n = 1$, $h_{st} = 2h$, $b_{st} = h$, $d_{st} = a/4$, $K_1 = 10 \text{ MN/m}^3$, $K_2 = 0.1 \text{ MN/m}$)

		Không gân	Gân x	Gân y	Gân x và y
UD-UD	Panel hình sin	83806.13	108887.78	108581.22	132787.50
	Panel parabol	83470.90	108642.34	108330.80	132604.56
	Panel trụ	83458.89	108634.54	108321.98	132599.03
X-X	Panel hình sin	84913.92	108742.91	107992.01	131078.44
	Panel parabol	84598.88	108509.79	107752.47	130903.04
	Panel trụ	84587.49	108502.28	107743.94	130897.65
V-A	Panel hình sin	79476.65	109680.63	108732.40	137252.32
	Panel parabol	79141.97	109457.17	108503.33	137098.93
	Panel trụ	79129.88	109450.06	108495.25	137094.41
A-V	Panel hình sin	80162.03	97257.90	96694.17	113898.69
	Panel parabol	79826.27	96988.88	96417.01	113680.54
	Panel trụ	79814.11	96980.11	96407.06	113673.62
O-O	Panel hình sin	77780.42	100846.02	100102.91	122707.17
	Panel parabol	77436.37	100594.87	99844.74	122520.36
	Panel trụ	77423.93	100586.78	99835.55	122514.63

Bảng 3.5 khảo sát các tần số cơ bản của panel trụ, panel hình sin và panel parabol FG-GRC có gân và không gân. Mode dao động tự do và tuyến tính của các panel nhận được ở các mode cơ bản ($m = n = 1$) đối với mọi trường hợp khảo sát. Có thể thấy rằng tần số cơ bản của panel có gân lớn hơn đáng kể so với tần số cơ bản của panel không gân. Ngoài ra, khác biệt nhỏ giữa tần số cơ bản của panel có gân x và panel có gân y, hay tác động lớn nhất lên tần số cơ bản nhận được trong trường hợp panel được tăng cứng bằng cả gân x và gân y có thể dễ dàng quan sát trong bảng này. Đối với các panel không gân, tần số cơ bản lớn nhất nhận được với các panel FG-X. Có thể giải thích hiện

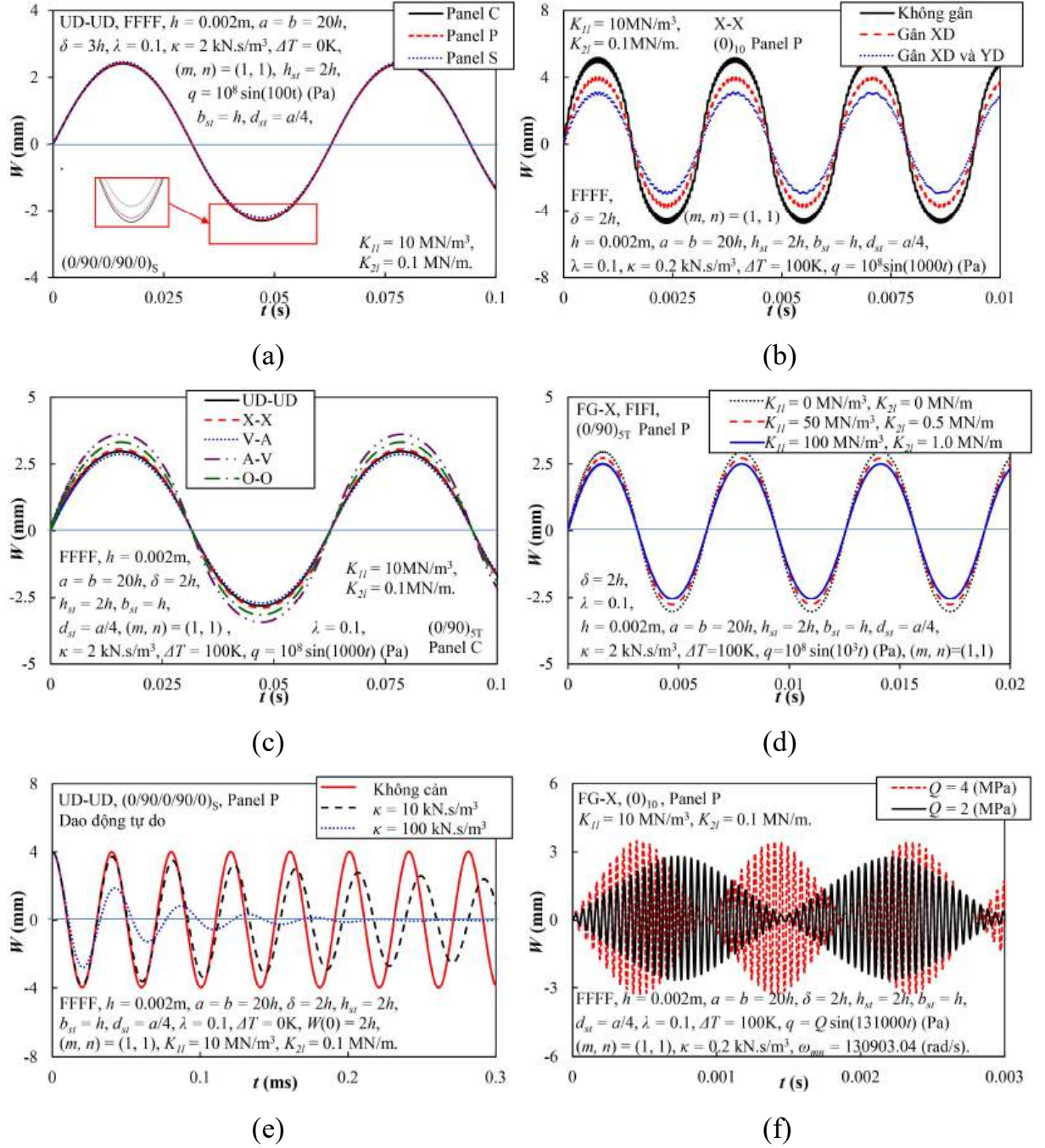
tượng này như sau: với panel FG-X, tỷ phần thể tích lớn của graphene sheet được thiết kế nhiều hơn ở các vị trí cách xa mặt trung bình của panel gây ra độ lệch tâm lớn hơn, làm cho độ cứng của panel FG-X lớn hơn so với các loại panel khác. Đối với các panel có gân, do thiết kế về phân bố graphene trong gân và trong panel, mặt trung bình của panel dịch chuyển về phía các gân tăng cứng, tần số cơ bản lớn nhất đạt được với panel V-A.



Hình 3.11. Đường cong biên độ-tần số của dao động tự do và cưỡng bức của panel trụ, panel parabol và panel hình sin có và không gân

Các hình 3.11a, b, c và d trình bày các đường cong biên độ-tần số của panel trụ, panel hình sin và panel parabol FG-GRC có gân và không gân của dao động tự do và cưỡng bức phi tuyến. Có thể thấy các đường cong biên độ-tần số của dao động cưỡng bức và dao động tự do tiến sát lại nhau khi biên độ đủ lớn (Hình 3.11a). Biên độ của tải cưỡng bức càng lớn thì đường cong của dao động cưỡng bức càng cách xa đường cong của dao động tự do. Ảnh hưởng của độ dày panel đến đường cong biên độ-tần số của panel parabol có gân được nghiên cứu trong Hình 3.11b. Kết quả cho thấy các đường cong biên độ-tần số sẽ cao hơn nếu độ dày của panel giảm. Hình 3.11c nghiên cứu ảnh

hường của độ nâng lên đường cong biên độ-tần số của panel hình sin. Có thể quan sát thấy xu hướng tăng đều sang phải của đường cong biên độ-tần số của dao động tự do có độ nâng nhỏ ở mặt trung bình. Thêm vào đó, khi độ nâng tăng, đường cong biên độ-tần số có xu hướng đi lên về bên phải trước khi đi lên về bên trái. Ảnh hưởng của gân tới các đường cong biên độ-tần số của panel trụ được đề cập trong Hình 3.11d. Xu hướng khác nhau của các đường cong có thể được quan sát ở biên độ nhỏ và lớn của panel trụ.



Hình 3.12. Dao động phi tuyến của panel trụ, panel hình sin và panel parabol có và không gân

Đáp ứng động của panel hình sin, panel parabol và panel trụ FG-GRC có gân có thể thấy được ở Hình 3.12a. Với cùng một độ nâng ở mặt phẳng giữa, người ta quan sát thấy những khác biệt nhỏ về biên độ dao động của panel hình sin, panel parabol và panel trụ. Biên độ dao động của panel trụ lớn hơn một chút so với panel parabol và panel hình sin. Tác động của gân tăng cứng trong việc giảm biên độ dao động của panel parabol được thấy rõ ở Hình 3.12b. Độ cứng của panel có gân bao gồm độ cứng của lớp vỏ panel và độ cứng của gân tăng cứng, dẫn đến độ cứng tổng thể của panel có gân phụ thuộc vào phân bố graphene của cả lớp vỏ và gân tăng cứng. Hình 3.12c cho thấy tác động của việc phân bố graphene đến đáp ứng động của panel trụ FG-GRC có gân. Tương tự, với tần số cơ bản, có thể thấy được lợi thế rõ ràng của việc giảm biên độ dao động của phân bố V-A so với các phân bố khác.

Bảng 3.6. Tải mất ổn định động tới hạn (GPa) của panel trụ, panel hình sin và panel parabol FG-GRC không gân ((0)₁₀, FFFF, $h=0,002\text{m}$, $a=b=20h$, $\delta=2h$, $\lambda=0$, $c=200$, $\Delta T=100\text{K}$, $m=n=1$, $K_1=10\text{MN/m}^3$, $K_2=0.1\text{MN/m}$)

	Loại panel	Tĩnh	Động		
			$\zeta=10^9(\text{Pa/s})$	$\zeta=2\times10^9(\text{Pa/s})$	$\zeta=3\times10^9(\text{Pa/s})$
UD	Hình sin	1.5459	1.5500	1.5530	1.5552
	Parabol	1.5336	1.5382	1.5412	1.5438
	Trụ	1.5332	1.5380	1.5402	1.5426
FG-X	Hình sin	1.5871	1.5920	1.5944	1.5963
	Parabol	1.5753	1.5802	1.5830	1.5864
	Trụ	1.5749	1.5800	1.5820	1.5852
FG-O	Hình sin	1.3316	1.3360	1.3384	1.3407
	Parabol	1.3199	1.3242	1.3270	1.3302
	Trụ	1.3195	1.3240	1.3266	1.3290

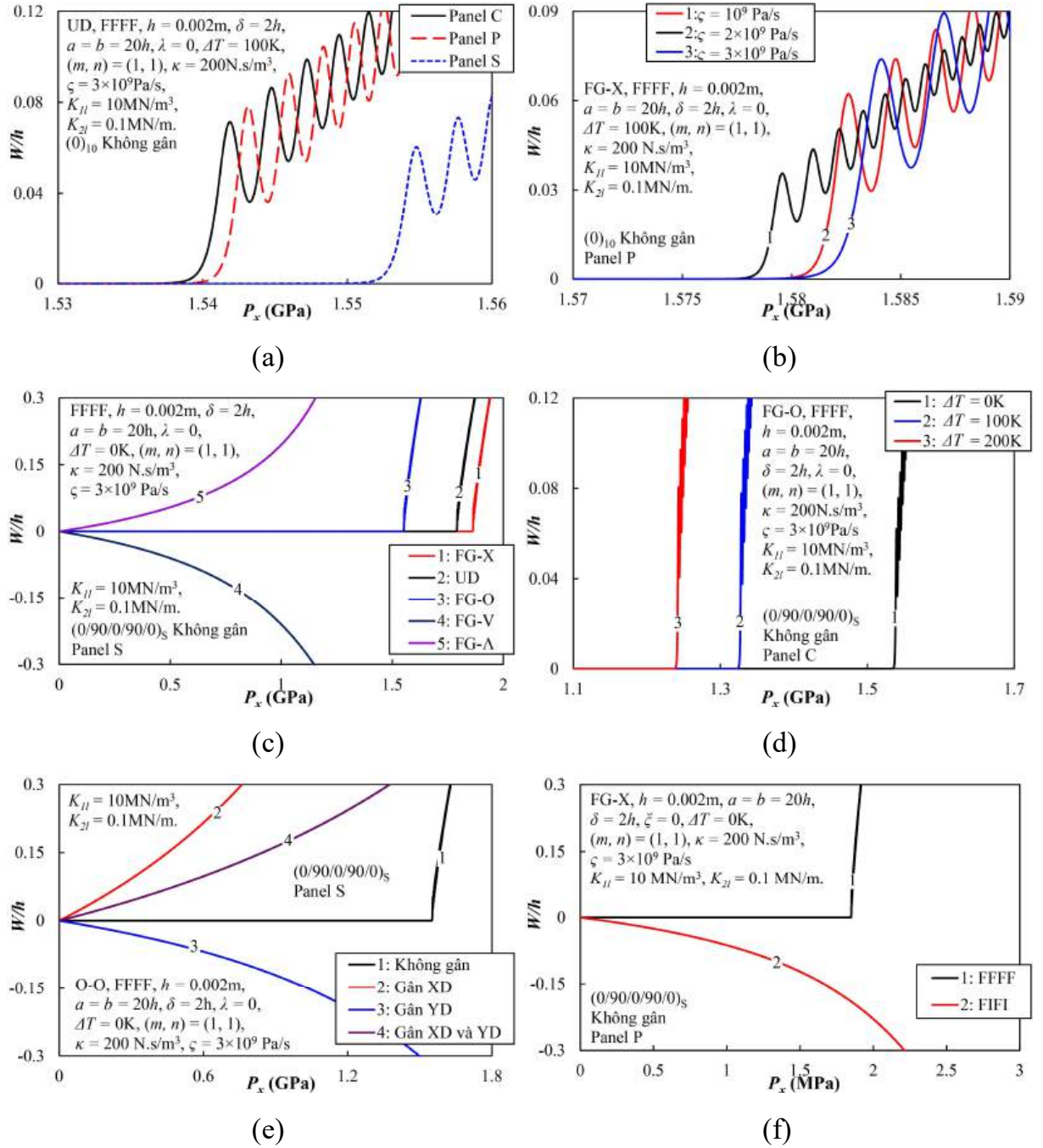
Độ cứng của nền đàn hồi tăng lên cũng làm giảm biên độ dao động của panel parabol có gân một cách rõ rệt như trong Hình 3.12d. Hệ số cản của cơ hệ lớn đến đáp ứng động của panel parabol FG-GRC như trong Hình 3.12e. Biên độ dao động của panel giảm rất nhanh theo thời gian với hệ số cản lớn. Các phách điều hòa có thể được quan sát trong Hình 3.12f khi tần số cưỡng bức tiến sát đến tần số cơ bản của panel. Độ dài của phách tăng lên đáng kể khi biên độ tải cưỡng bức giảm.

Tải mất ổn định tĩnh và động tới hạn của panel parabol, panel hình sin và panel trụ không gân, hoàn hảo và có phân bố UD, FG-X và FG-O có thể thấy được trong Bảng 3.6. Ở đây, tải trọng nén dọc trục được xem xét là một hàm tuyến tính theo thời gian. Có thể thấy rằng tải mất ổn định động tới hạn lớn hơn tải mất ổn định tĩnh tới hạn của các panel và tải mất ổn định động tới hạn tăng nếu tốc độ đặt tải tăng. Ưu điểm rõ ràng của phân bố FG-X so với phân bố UD và FG-O về tải mất ổn định động tới hạn cũng được thấy rõ qua các ví dụ này. Ngoài ra, tải mất ổn định động tới hạn của panel hình sin lớn hơn một chút so với panel parabol và panel trụ.

Đáp ứng động của các panel parabol, panel hình sin và panel trụ không gân và hoàn hảo chịu tải nén dọc trục có thể thấy được ở Hình 3.13a. Các vùng mất ổn định được quan sát rõ ràng trong hình này. Cũng có thể thấy rằng biên độ cực đại của vùng mất ổn định của panel hình sin nhỏ hơn đáng kể so với panel parabol và panel trụ. Tác động của tốc độ đặt tải đến đáp ứng động của panel parabol FG-GRC không gân được quan sát trong Hình 3.13b. Khi tốc độ tải tăng, tải mất ổn định động tới hạn của panel tăng lên và biên độ tối đa của vùng mất ổn định cũng tăng. Tác động của sự phân bố graphene đến đáp ứng động của panel hình sin không gân được nghiên cứu trong Hình 3.13c.

Có thể chia thành hai trường hợp: phân bố đối xứng (UD, FG-X và FG-O) và phân bố không đối xứng (FG-V và FG-A). Do sự phân bố không đối xứng của các panel FG-V và FG-A, đường cong đáp ứng động của các panel FG-V và FG-A tăng đều đặn kể từ thời điểm chất tải và hiện tượng mất ổn định đột ngột không xảy ra với panel FG-V và FG-A như với panel UD, FG-X và FG-O. Tác động của sự thay đổi nhiệt độ đến đáp ứng mất ổn định động của panel trụ FG-O FFFF được nghiên cứu trong Hình 3.13d. Từ hình vẽ thấy rằng, do tính chất vật liệu giảm, tải mất ổn định động tới hạn của panel giảm xuống rõ rệt nếu nhiệt độ tăng. Lưu ý rằng các ràng buộc biên theo hướng x và y không tồn tại đối với các panel FFFF, do đó hiện tượng mất ổn định nhiệt không xảy ra trong trường hợp này. Có thể quan sát tác động của gân tăng cứng đến đáp ứng động của panel hình sin FFFF FG-O trong Hình 3.13e. Tương tự như khi nghiên cứu tác động của quy luật phân bố vật liệu khác nhau (Hình 3.13c), các gân tăng cứng tạo ra độ lệch tâm lớn cho các panel, do đó, mất ổn định động chỉ được tạo ra trong trường hợp các panel không gân và quy luật phân bố vật liệu đối xứng. Các điều kiện biên cũng ảnh

hưởng lớn đến đáp ứng động của các panel (Hình 3.13f). Kết quả cũng cho thấy hiện tượng mất ổn định chỉ xảy ra trong trường hợp điều kiện biên FFFF.



Hình 3.13. Mất ổn định động của panel trụ, panel hình sin và panel parabol có và không gán

3.5. Kết luận Chương 3

Chương 3 đã nghiên cứu về ổn định và động lực của panel trụ, panel hình sin và panel parabol FG-CNTRC và FG-GRC có gán tăng cứng FG-CNTRC và FG-GRC, tương ứng, có và không có lớp áp điện. Sử dụng kỹ thuật san tác dụng gán cải tiến, đối

với gân tăng cứng dị hướng biến dạng trượt bậc cao, phương trình Euler-Lagrange và hiệu ứng cản của cơ hệ được xem xét bằng cách sử dụng hàm tiêu tán Rayleigh. Các ví dụ số về ứng xử ổn định và động lực phi tuyến được nghiên cứu bằng các liên hệ hiển với trường hợp tĩnh, bằng phương pháp Runge-Kutta trong trường hợp động và tải mất ổn định động tới hạn được xác định bằng tiêu chuẩn Budiansky-Roth.

Tác động của gân đến ứng xử ổn định và động lực của panel đã được nghiên cứu chi tiết, với một số nhận xét như sau:

- Tần số cơ bản, khả năng chịu tải tĩnh và động của panel có gân lớn hơn đáng kể so với panel không gân. Biên độ dao động của các panel có gân nhỏ hơn đáng kể so với các panel không gân tương ứng.

- Khả năng chịu tải tĩnh và động của panel hình sin lớn hơn so với panel parabol và panel trụ tương ứng, tuy không đáng kể. Tương tự, panel hình sin cũng có biên độ nhỏ hơn không nhiều so với hai loại panel còn lại.

- Tải mất ổn định động tới hạn và hiện tượng mất ổn định động của panel dưới tác dụng của tải trọng nén dọc trục chỉ có thể thấy rõ với panel không gân có phân bố đối xứng.

- Tính chất vật liệu, hình học, điều kiện biên, nhiệt độ môi trường, nền đàn hồi, lớp áp điện, tần số và biên độ tải cưỡng bức cũng ảnh hưởng đáng kể tới ứng xử ổn định và động lực của panel.

CHƯƠNG 4. ỔN ĐỊNH ĐÀN HỒI TÍNH PHI TUYẾN CỦA VỎ TRỤ FG-GPLRC VÀ FG-GPLRC RỖNG CÓ GÂN TĂNG CỨNG TRỰC GIAO VÀ XOẮN ỐC

Vỏ trụ là một loại vỏ kín, thường dùng trong trường hợp các kết cấu chịu tải trọng lớn. Vỏ trụ chế tạo bằng vật liệu composite thể hiện tính vượt trội trong công trình giao thông và xây dựng. Tính chất nhẹ và bền của composite, đặc biệt là các loại composite tiên tiến cho phép tối ưu hóa trọng lượng nhưng không ảnh hưởng tới khả năng chịu lực, đáp ứng được các đòi hỏi cao đối với các công trình đặc biệt.

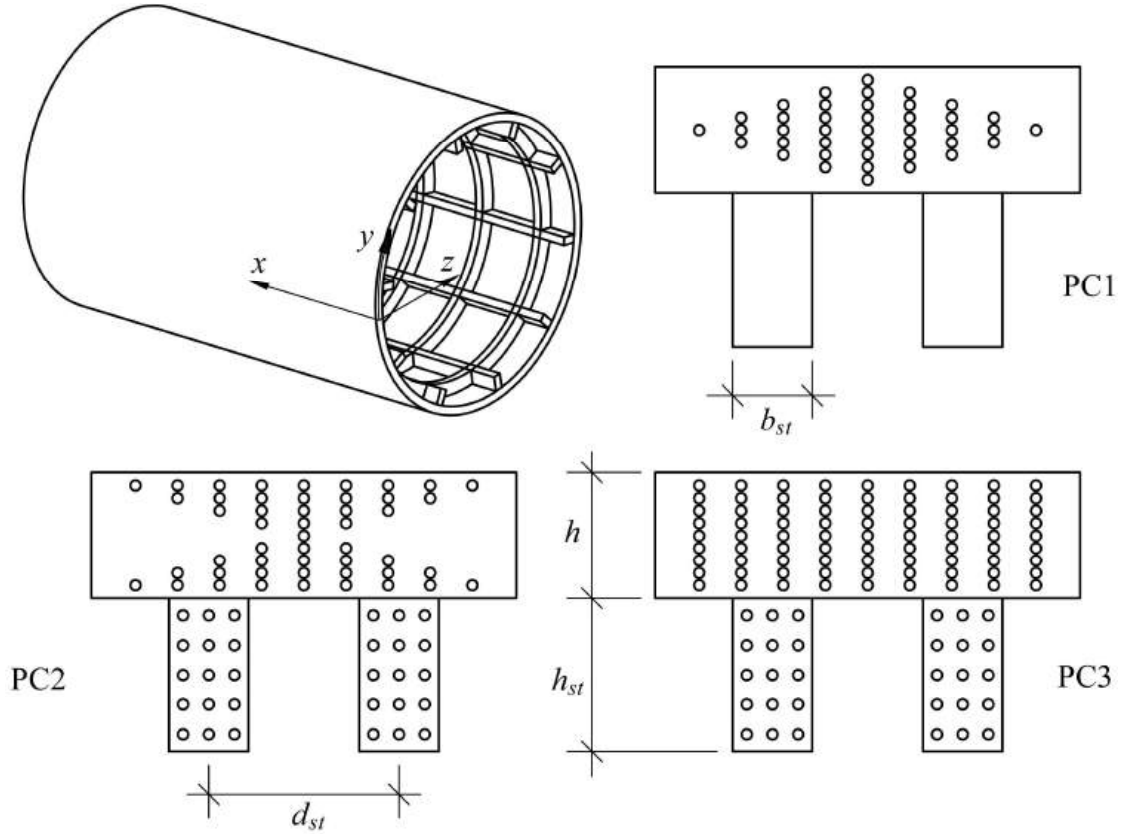
Để nâng cao khả năng chịu tải của vỏ trụ, việc tăng cứng bằng gân là một phương án mang lại hiệu quả cao. Đặc biệt, phương pháp này tối ưu hóa sử dụng vật liệu mà không làm tăng đáng kể khối lượng, mang lại lợi ích vượt trội trong các kết cấu yêu cầu tính nhẹ và bền. Tuy nhiên, khảo sát từ các tài liệu khoa học hiện có cho thấy, phân tích chi tiết về ứng xử mất ổn định phi tuyến của vỏ trụ FG-GPLRC và FG-GPLRC rỗng chịu áp lực ngoài có gân chưa được tập trung nghiên cứu. Những cấu kiện này, với đặc tính gia cường graphene và có độ rỗng nhất định là bài toán cơ học phức tạp, đòi hỏi phải có các mô hình và phương pháp phân tích đặc thù để hiểu rõ cơ chế làm việc và dự đoán trạng thái mất ổn định. Luận án đã áp dụng lý thuyết vỏ Donnell và lý thuyết độ võng lớn phi tuyến nhằm thiết lập các phương trình cơ bản cho bài toán. Sử dụng phương pháp năng lượng Ritz để phân tích các đường cong sau mất ổn định và xác định tải trọng mất ổn định tới hạn. Ảnh hưởng của các yếu tố như hình dạng và kích thước gân, phân bố độ rỗng, hệ số rỗng của vật liệu và tỷ phần khối lượng graphene (GPL) đến trạng thái mất ổn định tuyến tính và phi tuyến của vỏ trụ cũng được tập trung làm rõ. Việc hiểu rõ ứng xử của vỏ trụ FG-GPLRC và FG-GPLRC rỗng có gân giúp tối ưu hóa thiết kế, tiết kiệm vật liệu trong xây dựng công trình.

Nội dung chính của chương này đã được công bố trên 02 bài báo, bao gồm một bài đăng trên tạp chí Journal of Science and Transport Technology của trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải và một bài trên Tuyển tập Công trình hội nghị cơ học toàn quốc (Bài báo số 4 và số 5 trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả liên quan đến luận án).

4.1. Mô hình kết cấu và vật liệu

4.1.1. Mô hình 1: Vỏ trụ FG-GPLRC rỗng có gân tăng cứng trực giao

Vỏ trụ FG-GPLRC rỗng có gân chịu áp lực ngoài với áp suất phân bố đều q . Các thông số hình học của vỏ và gân được quan sát trong Hình 4.1. Bán kính và chiều dài của vỏ được ký hiệu tương ứng là R và L .



Hình 4.1. Mô hình và thông số hình học của vỏ trụ FG-GPLRC rỗng có gân trực giao FG-GPLRC rỗng

Trong chương này, kiểu phân bố của GPL theo chiều dày kết cấu được thiết kế là kiểu phân bố đều, tỷ phần thể tích của GPL của vỏ và gân được biểu thị tương tự biểu thức (1.10) và (2.4) như sau:

$$\bar{V}_G = \frac{\rho_m \Lambda_G}{\rho_m \Lambda_G + \rho_G (1 - \Lambda_G)}. \quad (4.1)$$

Mô đun đàn hồi theo chiều dày kết cấu có thể được ước tính bằng mô hình Halpin-Tsai, trong khi đó hệ số Poisson được xác định theo quy tắc hỗn hợp tương tự biểu thức (1.8) và (2.3), dẫn tới:

$$E_1 = \frac{1}{8} \left[\frac{3(1 + \bar{m}_1 \bar{n}_1 \bar{V}_G) E_m}{1 - \bar{n}_1 \bar{V}_G} + \frac{5(1 + \bar{m}_2 \bar{n}_2 \bar{V}_G) E_m}{1 - \bar{n}_2 \bar{V}_G} \right], \quad (4.2)$$

$$\bar{v} = v_G \bar{V}_G + v_m (1 - \bar{V}_G), \quad (4.3)$$

Chương này xem xét ba loại phân bố độ rỗng (PC1, PC2 và PC3), hệ số Poisson và mô đun đàn hồi của vỏ được biểu diễn như sau:

$$\bar{v}_{sh} = v_1, \quad (4.4)$$

$$\bar{E}_{sh} = \begin{cases} E_1 [1 - e_1 \cos(\pi z/h)], & \text{PC1} \\ E_1 \{1 - e_2 [1 - \cos(\pi z/h)]\}, & \text{PC2} \\ E_1 e_3, & \text{PC3} \end{cases} \quad (4.5)$$

và cho các gân:

$$\bar{v}_{st} = v_m, \quad (4.6)$$

$$\bar{E}_{st} = \begin{cases} E_m, & \text{PC1} \\ E_m (1 - e_2), & \text{PC2} \\ E_m e_3, & \text{PC3} \end{cases} \quad (4.7)$$

trong đó e_1 , e_2 , và e_3 là các hệ số độ rỗng.

Có thể thấy, khi các lỗ rỗng tập trung nhiều ở gần bề mặt giữa của vỏ sẽ được kiểu phân bố PC1, ngược lại chúng tập trung chủ yếu ở hai bề mặt vỏ có phân bố PC2, đồng thời phân bố đều trên toàn bộ bề dày vỏ có kiểu phân bố PC3. Sự phân bố độ rỗng trong các gân được thiết kế để đảm bảo tính liên tục giữa vỏ và các gân.

Xét các trường hợp khối lượng của nền kim loại rỗng giống nhau với các loại phân bố độ rỗng khác nhau, các mối quan hệ sau được áp dụng như sau:

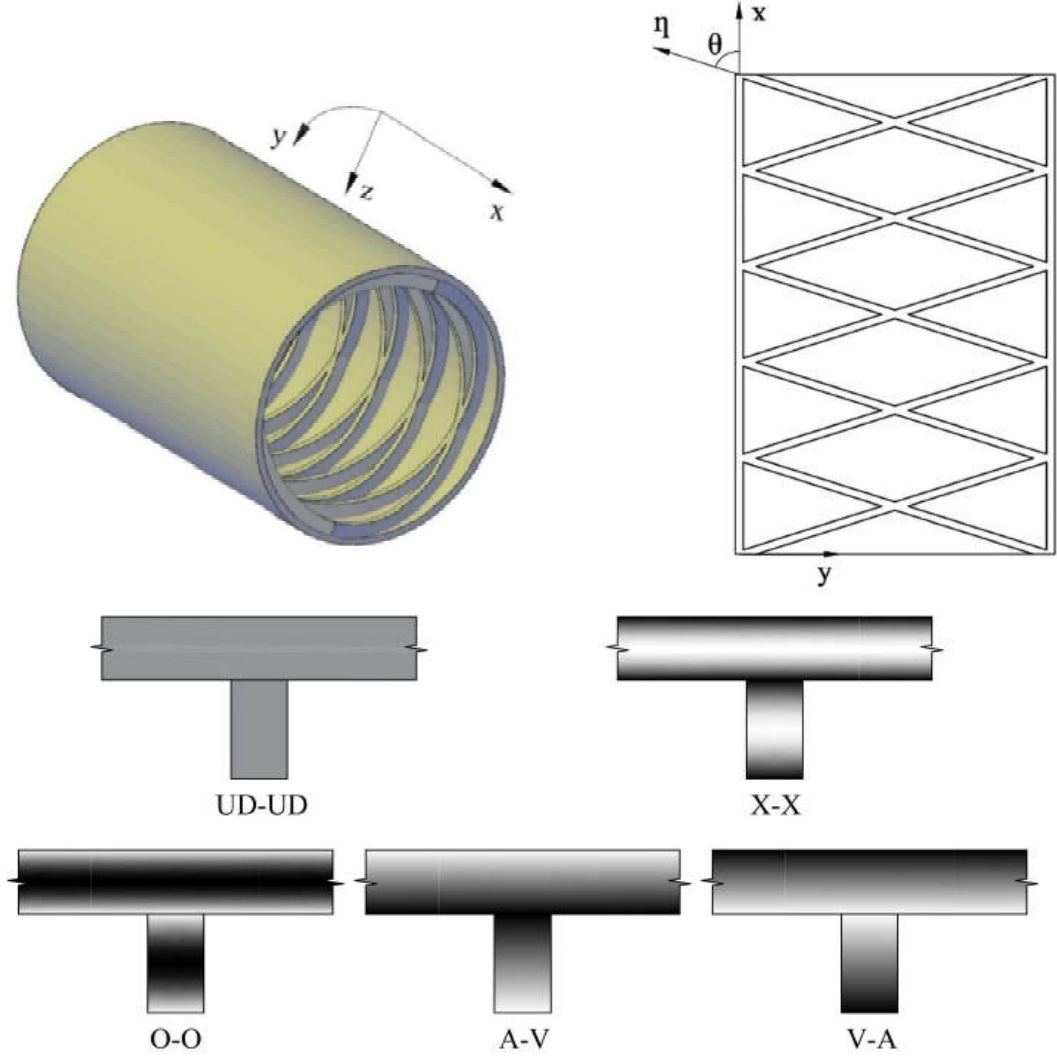
$$\int_0^{h/2} \sqrt{1 - e_1 \cos(\pi z/h)} dz = \int_0^{h/2} \sqrt{1 - e_2 [1 - \cos(\pi z/h)]} dz = \int_0^{h/2} \sqrt{e_3} dz, \quad (4.8)$$

trong đó e_1 được chọn làm giá trị tham chiếu e_2 và e_3 được tính theo e_1 .

4.1.2. Mô hình 2: Vỏ trụ FG-GPLRC có gân tăng cứng FG-GPLRC xoắn ốc

Xét vỏ trụ FG-GPLRC chịu áp lực ngoài phân bố đều q được tăng cứng bằng các gân FG-GPLRC trục giao và xoắn ốc. Các thông số hình học của vỏ được ký hiệu như trên Hình 4.2, bao gồm bán kính của vỏ R , độ dày h và chiều dài L , và hệ tọa độ (x, y, z) như trên Hình 4.2. Khoảng cách của các gân xoắn ốc, gân đai và gân dọc được ký hiệu lần lượt là d_{stSPR} , d_{stSPR} , và d_{stSPR} , chiều cao và chiều rộng của gân lần lượt được ký hiệu là h_{stSPR} , h_{stSPR} , h_{stSPR} và b_{stSPR} , b_{stSPR} , và b_{stSPR} . Số lượng gân xoắn ốc được

xác định bằng cách tối ưu hóa tải áp lực ngoài tới hạn của vỏ với góc tương ứng của gân xoắn ốc bằng $\theta = \arccos\left(\frac{n_{stSPR}d_{stSPR}}{2\pi R}\right)$.



Hình 4.2. Hình dạng, hệ tọa độ và phân bố vật liệu của vỏ trụ FG-GPLRC và gân FG-GPLRC xoắn ốc

Mô đun Young của vỏ và gân được xác định bằng mô hình Halpin-Tsai mở rộng, như trong biểu thức (1.8) và (2.3).

Năm kiểu phân bố của GPL là UD, FG-X, FG-O, FG-V và FG-Λ cho vỏ và các gân được viết tương tự chương 2 khi cho $h_v = 0$, cụ thể như sau:

- Phân bố UD-UD (vỏ UD có gân UD):

$$\Lambda_G^{sh} = \Lambda_G, \text{ đối với vỏ,} \quad (4.9)$$

$$\Lambda_G^{st} = \Lambda_G, \text{ đối với gân,} \quad (4.10)$$

- Phân bố X-X (vỏ FG-X có gân FG-X):

$$\Lambda_G^{sh} = 4|z|\Lambda_G/h, \text{ đối với vỏ,} \quad (4.11)$$

$$\Lambda_G^{st} = \left[\frac{(2h-4z)}{h_{st}} + 2 \right] \Lambda_G, \text{ đối với gân,} \quad (4.12)$$

- Phân bố O-O (Vỏ FG-O có gân FG-O):

$$\Lambda_G^{sh} = (1-2z/h)\Lambda_G, \text{ đối với vỏ,} \quad (4.13)$$

$$\Lambda_G^{st} = \left[2 - \frac{(4z-2h)}{h_{st}} - 2 \right] \Lambda_G, \text{ đối với gân,} \quad (4.14)$$

- Phân bố V-A (Vỏ FG-V có gân FG-A):

$$\Lambda_G^{sh} = (1-2z/h)\Lambda_G, \text{ đối với vỏ,} \quad (4.15)$$

$$\Lambda_G^{st} = \left[\frac{(2z-h)}{h_{st}} \right] \Lambda_G, \text{ đối với gân,} \quad (4.16)$$

- Phân bố A-V (Vỏ FG-A có gân FG-V):

$$\Lambda_G^{sh} = (1+2z/h)\Lambda_G, \text{ đối với vỏ,} \quad (4.17)$$

$$\Lambda_G^{st} = \left[2 + \frac{(h-2z)}{h_{st}} \right] \Lambda_G, \text{ đối với gân,} \quad (4.18)$$

được z xác định trong miền $-h/2 \leq z \leq h/2$ với vỏ và $h/2 \leq z \leq h/2 + h_{st}$ với gân.

4.2. Hệ phương trình chủ đạo

Thành phần biến dạng tại một điểm có tọa độ theo phương bề dày z được viết dưới dạng [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 - zw_{,xx}, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 - zw_{,yy}, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 - 2zw_{,xy}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sử dụng lý thuyết vỏ Donnell và tính phi tuyến độ võng lớn của von Karman để thiết lập các phương trình chủ đạo về ứng xử mất ổn định của vỏ trụ có gân dưới tác dụng của áp lực ngoài. Các liên hệ biến dạng-chuyển vị được biểu diễn dưới dạng phi tuyến, như sau [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{1}{2}w_{,x}^2 + u_{,x}, \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{1}{2}w_{,y}^2 + v_{,y} - \frac{w}{R}, \\ \gamma_{xy}^0 &= w_{,x}w_{,y} + v_{,x} + u_{,y}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Sử dụng (4.20), phương trình tương thích biến dạng của vỏ trụ FG-GPLRC được thiết lập như sau:

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 - w_{,xy}^2 + \frac{w_{,xx}}{R} + w_{,yy} w_{,xx} = 0. \quad (4.21)$$

Định luật Hooke cho vỏ trụ rỗng FG-GPLRC được áp dụng cho vỏ:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Nội lực của vỏ có dạng:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & C_{66} \\ C_{11} & C_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

với D_{ij}, C_{ij} , và B_{ij} là các thành phần độ cứng được tính bằng:

$$(D_{ij}, C_{ij}, B_{ij}) = (D_{ij}^{sh}, C_{ij}^{sh}, B_{ij}^{sh}) + (D_{ij}^{st-ort}, C_{ij}^{st-ort}, B_{ij}^{st-ort}) + (D_{ij}^{st-spr}, C_{ij}^{st-spr}, B_{ij}^{st-spr}), \quad (4.24)$$

với $D_{ij}^{sh}, C_{ij}^{sh}, B_{ij}^{sh}$, $D_{ij}^{st-ort}, C_{ij}^{st-ort}, B_{ij}^{st-ort}$, và $D_{ij}^{st-spr}, C_{ij}^{st-spr}, B_{ij}^{st-spr}$ là độ cứng của vỏ và gân, như sau:

$$(D_{ij}^{sh}, C_{ij}^{sh}, B_{ij}^{sh}) = \int_{h/2}^{-h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz, \quad (4.25)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \bar{E}_{sh} / (1 - \bar{\nu}_{sh}^2) = Q_{22}, \\ Q_{12} &= \bar{E}_{sh} \bar{\nu}_{sh} / (1 - \bar{\nu}_{sh}^2), \\ Q_{66} &= \bar{E}_{sh} / [2(1 + \bar{\nu}_{sh})]. \end{aligned}$$

Độ cứng của gân trục giao có thể đạt được bằng cách sử dụng kỹ thuật san tác dụng gân cho gân FG-GPLRC:

$$\begin{aligned}
D_{11}^{st-ort} &= \frac{b_{stXD}}{d_{stXD}} E_1^{stXD}, D_{22}^{st-ort} = \frac{b_{stYD}}{d_{stYD}} E_1^{stYD}, D_{12}^{st-ort} = 0, D_{66}^{st-ort} = 0, \\
C_{11}^{st-ort} &= \frac{b_{stXD}}{d_{stXD}} E_2^{stXD}, C_{22}^{st-ort} = \frac{b_{stYD}}{d_{stYD}} E_2^{stYD}, C_{12}^{st-ort} = 0, C_{66}^{st-ort} = 0, \\
B_{11}^{st-ort} &= \frac{b_{stXD}}{d_{stXD}} E_3^{stXD}, B_{22}^{st-ort} = \frac{b_{stYD}}{d_{stYD}} E_3^{stYD}, B_{12}^{st-ort} = 0, B_{66}^{st-ort} = 0,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Trong khi đó, bằng cách kết hợp kỹ thuật chuyển đổi hệ trục tọa độ với kỹ thuật san tác dụng gân FG-GPLRC, các thành phần độ cứng của gân xoắn ốc xác định như sau:

$$\begin{aligned}
D_{11}^{st-spr} &= 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_1^{st-spr} \cos^4 \theta, D_{22}^{st-spr} = 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_1^{st-spr} \sin^4 \theta, \\
D_{12}^{st-spr} &= 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_1^{st-spr} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, D_{66}^{st-spr} = 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_1^{st-spr} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
C_{11}^{st-spr} &= 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_2^{st-spr} \cos^4 \theta, C_{22}^{st-spr} = 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_2^{st-spr} \sin^4 \theta, \\
C_{12}^{st-spr} &= 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_2^{st-spr} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, C_{66}^{st-spr} = 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_2^{st-spr} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
B_{11}^{st-spr} &= 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_3^{st-spr} \cos^4 \theta, B_{22}^{st-spr} = 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_3^{st-spr} \sin^4 \theta, \\
B_{12}^{st-spr} &= 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_3^{st-spr} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, B_{66}^{st-spr} = 2 \frac{b_{stSPR}}{d_{stSPR}} E_3^{st-spr} \sin^2 \theta \cos^2 \theta,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

trong đó:

$$(E_1^{st}, E_2^{st}, E_3^{st}) = \int_{h/2}^{h/2+h_{st}} \bar{E}_{st}(1, z, z^2) dz. \tag{4.28}$$

Hàm ứng suất η có thể được đưa vào bài toán đáp ứng ba điều kiện sau:

$$\eta_{,yy} = N_x, \quad \eta_{,xy} = -N_{xy}, \quad \eta_{,xx} = N_y. \tag{4.29}$$

Bằng cách sử dụng (4.23) và (4.29), phương trình tương thích (4.21) được thiết lập lại dưới dạng sau:

$$\begin{aligned}
&(D_{11}^* + D_{22}^* + D_{66}^*) \eta_{,xxyy} + D_{12}^* \eta_{,yyyy} - w_{,xy}^2 + D_{21}^* \eta_{,xxxx} + C_{21}^* w_{,xxxx} + C_{12}^* w_{,yyyy} \\
&+ \frac{1}{R} w_{,xx} + (C_{11}^* + C_{22}^* - C_{66}^*) w_{,xxyy} + w_{,xx} w_{,yy} = 0,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

trong đó:

$$D_{12}^* = \frac{D_{22}D_{66}}{\Omega}, D_{11}^* = -\frac{D_{12}D_{66}}{\Omega}, D_{22}^* = D_{11}^*, D_{66}^* = \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{\Omega}, D_{21}^* = \frac{D_{11}D_{66}}{\Omega},$$

$$\begin{aligned}
C_{11}^* &= D_{66} \frac{D_{22}C_{11} - D_{12}C_{12}}{\Omega}, & C_{12}^* &= D_{66} \frac{D_{22}C_{12} - D_{12}C_{22}}{\Omega}, \\
C_{21}^* &= D_{66} \frac{D_{11}C_{12} - D_{12}C_{11}}{\Omega}, & C_{22}^* &= D_{66} \frac{D_{11}C_{22} - D_{12}C_{12}}{\Omega}, \\
C_{66}^* &= 2C_{66} \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{\Omega}, & \Omega &= D_{11}D_{22}D_{66} - D_{12}^2D_{66}.
\end{aligned}$$

4.3. Điều kiện biên và hàm ứng suất

Trong chương này sẽ xem xét vỏ trụ FG-GPLRC đặt trên gối ở hai cạnh và chịu áp lực ngoài. Các điều kiện biên ở hai cạnh có thể được biểu diễn bởi:

$$w|_{x=0; x=L} = M_x|_{x=0; x=L} = N_x|_{x=0; x=L} = N_{xy}|_{x=0; x=L} = 0. \quad (4.31)$$

Dạng độ võng phổ biến của vỏ trụ chịu áp lực ngoài được chọn xấp xỉ bằng [4]:

$$w(x, y) = f_0 + f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L}, \quad (4.32)$$

trong đó f_0 , f_1 và f_2 là biên độ độ võng, m và n là mode mất ổn định của vỏ.

Thế (4.32) vào (4.30), hàm ứng suất có thể đạt được, dẫn đến:

$$\eta = \eta_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + \eta_2 \cos \frac{2m\pi x}{L} + \eta_3 \sin \frac{3m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + \eta_4 \cos \frac{2ny}{R} - \sigma_{0y} \frac{hx^2}{2}, \quad (4.33)$$

với σ_{0y} là ứng suất theo hướng vòng và:

$$\eta_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa_3} f_1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_3} f_1 f_2, \quad \eta_3 = \frac{\kappa_4}{\kappa_5} f_1 f_2,$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \frac{C_{21}^*}{D_{21}^*} f_2 - \frac{1}{8} \frac{L^2}{Rm^2\pi^2 D_{21}^*} f_2 + \frac{1}{32} \frac{L^2 n^2}{m^2 \pi^2 R^2 D_{21}^*} f_1^2, \quad \eta_4 = \frac{1}{32} \frac{m^2 \pi^2 R^2}{L^2 n^2 D_{12}^*} f_1^2,$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= -\frac{\pi^8 m^8}{L^8} D_{21}^* C_{21}^* - \frac{n^8}{R^8} D_{12}^* C_{12}^* - \frac{m^6 \pi^6 n^2}{L^6 R^2} \left[(C_{11}^* - C_{66}^* + C_{22}^*) D_{21}^* + (D_{11}^* + D_{66}^* + D_{22}^*) C_{21}^* \right] - \\
&+ \frac{m^4 \pi^4 n^4}{L^4 R^4} \left[(D_{22}^* + D_{11}^* + D_{66}^*) (C_{22}^* + C_{11}^* - C_{66}^*) + C_{21}^* D_{12}^* + D_{21}^* C_{12}^* \right] + \\
&+ \left(\frac{m^4 \pi^4 n^2}{L^4 R^2 a} + \frac{\pi^6 m^6}{L^6 R} \right) D_{21}^* + \left(\frac{m^2 \pi^2 n^4}{L^2 R^5} + \frac{n^6}{a R^6} \right) D_{12}^* + \left(\frac{m^2 \pi^2 n^4}{a L^2 R^4} + \frac{m^4 \pi^4 n^2}{L^4 R^3} \right) (D_{11}^* + D_{22}^* + D_{66}^*) \\
&- \frac{m^2 \pi^2 n^6}{L^2 R^6} \left[(C_{11}^* - C_{66}^* + C_{22}^*) D_{12}^* + (D_{11}^* + D_{66}^* + D_{22}^*) C_{12}^* \right], \\
\kappa_3 &= \left[\frac{\pi^4 m^4}{L^4} D_{21}^* + \frac{n^4}{R^4} D_{12}^* + \frac{m^2 \pi^2 n^2}{L^2 R^2} (D_{11}^* + D_{22}^* + D_{66}^*) \right]^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_4 &= 81 \frac{m^6 \pi^6 n^2}{L^6 R^2} D_{21}^* + \frac{m^2 \pi^2 n^6}{L^2 R^6} D_{12}^* + 9 \frac{m^4 \pi^4 n^4}{L^4 R^4} (D_{11}^* + D_{22}^* + D_{66}^*), \\ \kappa_2 &= -\frac{m^6 n^2 \pi^6}{L^6 R^2} D_{21}^* - \frac{m^4 \pi^4 n^4}{L^4 R^4} (D_{11}^* + D_{22}^* + D_{66}^*) - \frac{m^2 \pi^2 n^6}{L^2 R^6} D_{12}^*, \\ \kappa_5 &= \left[81 \frac{m^4 \pi^4}{L^4} D_{21}^* + \frac{n^4}{R^4} D_{12}^* + 9 \frac{m^2 \pi^2 n^2}{L^2 R^2} (D_{11}^* + D_{22}^* + D_{66}^*) \right]^2.\end{aligned}$$

4.4. Phương pháp năng lượng Ritz

Đối với vỏ trụ phải thỏa mãn điều kiện chu vi kín, biểu diễn dưới dạng:

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L v_{,y} dx dy = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left(\varepsilon_y^0 + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) dx dy = 0. \quad (4.34)$$

Phương trình (4.34) được viết lại bằng cách sử dụng (4.20) và (4.33), như sau:

$$\sigma_{0y} = \frac{1}{D_{21}^*} \left(\frac{1}{Rh} f_0 - \frac{n^2}{8R^2 h} f_1^2 + \frac{1}{2Rh} f_2 \right). \quad (4.35)$$

Thế năng toàn phần của vỏ có thể xác định bởi:

$$\Phi = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} q w dx dy + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) dx dy dz. \quad (4.36)$$

Tổng thế năng được thiết lập lại theo hai hàm ẩn là hàm độ võng w và hàm ứng suất η . Thế hàm ứng suất và dạng độ võng trong các phương trình (4.33) và (4.32), ta nhận được dạng tổng thế năng mới, cuối cùng, áp dụng phương pháp Ritz, như sau:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} = 0. \quad (4.37)$$

Kết hợp phương trình (4.37) với điều kiện chu vi kín (4.35), dẫn đến:

$$\lambda_{11} f_0 + \lambda_{12} f_1^2 + \lambda_{13} f_2 - 2q_0 = 0, \quad (4.38)$$

$$\lambda_{21} f_0 + \lambda_{22} f_1^2 + \lambda_{23} f_2^2 + \lambda_{24} f_2 + \lambda_{26} = 0, \quad (4.39)$$

$$\lambda_{31} f_0 + \lambda_{32} f_1^2 + \lambda_{33} f_1^2 f_2 + \lambda_{34} f_2 - q = 0, \quad (4.40)$$

trong đó:

$$\lambda_{11} = \frac{2}{R^2 D_{21}^*}, \quad \lambda_{12} = -\frac{n^2}{4R^3 D_{21}^*},$$

$$\lambda_{13} = \frac{1}{R^2 D_{21}^*}, \quad \lambda_{14} = -\frac{h(D_{11}^* + D_{22}^*)}{R D_{21}^*},$$

$$\lambda_{21} = 2S_5, \quad \lambda_{22} = 2S_1, \quad \lambda_{23} = 2S_2,$$

$$\lambda_{24} = 2S_3, \quad \lambda_{25} = 2S_6 - \frac{\pi^2 h m^2}{L^2} + \frac{n^2 h}{R^2} \frac{D_{11}^*}{D_{21}^*},$$

$$\lambda_{26} = 2S_4, \quad \lambda_{31} = T_4, \quad \lambda_{32} = T_2, \quad \lambda_{33} = T_1,$$

$$\lambda_{34} = T_3, \quad \lambda_{35} = -\frac{\pi^2 h m^2}{L^2}, \quad \lambda_{36} = T_5 - \frac{h D_{11}^*}{R D_{21}^*},$$

$$S_1 = \frac{1}{32} \left(\frac{\pi^4 m^4}{L^4 D_{12}^*} + \frac{3n^4}{R^4 D_{21}^*} \right),$$

$$S_2 = \frac{9}{2} \left(\frac{\kappa_4^2}{\kappa_5^2} \right) R_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_2^2}{\kappa_3^2} \right) R_1,$$

$$S_3 = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_3^2} R_1 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_2 (R_5 + R_8)}{\kappa_3} + \frac{1}{4} \frac{\pi^2 m^2 n^2 (J_{11} + C_{21}^*)}{L^2 R^2 D_{21}^*} - \frac{3}{8} \frac{n^2}{R^3 D_{21}^*},$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_1^2}{\kappa_3^2} \right) R_1 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_1 (R_5 + R_8)}{\kappa_3} - \frac{1}{2} \frac{n^4 G_{22}}{R^4} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 m^2 n^2 (2G_{66} + G_{21} + G_{12})}{R^2 L^2} - \frac{1}{2} \frac{\pi^4 m^4 G_{11}}{L^4},$$

$$S_5 = -\frac{1}{2} \frac{n^2}{R^3 D_{21}^*}, \quad S_6 = -\frac{1}{4} \frac{h n^2 (D_{11}^* - D_{22}^*)}{R^2 D_{21}^*},$$

$$T_1 = \frac{9}{2} \frac{\kappa_4^2}{\kappa_5^2} R_2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_2^2}{\kappa_3^2} R_1, \quad T_4 = \frac{1}{R^2 D_{21}^*}, \quad T_5 = \frac{h(D_{11}^* - D_{22}^*)}{2R D_{21}^*},$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_3^2} R_1 + \frac{1}{4} \frac{\kappa_2 (R_5 + R_8)}{\kappa_3} + \frac{1}{8} \frac{\pi^2 m^2 n^2 (J_{11} + C_{21}^*)}{R^2 L^2 D_{21}^*} - \frac{3}{16} \frac{n^2}{R^3 D_{21}^*},$$

$$T_3 = \frac{3}{4R^2 D_{21}^*} - \frac{\pi^2 m^2}{L^2 R} \frac{C_{21}^* + J_{11}}{D_{21}^*} + 4 \frac{\pi^4 m^4}{L^4} \left(\frac{J_{11} C_{21}^*}{D_{21}^*} - G_{11} \right),$$

$$R_1 = \frac{n^2 \pi^2 m^2}{L^2 R^2} (D_{11}^* + D_{22}^* + D_{66}^*) + \frac{n^4}{R^4} D_{12}^* + \frac{\pi^4 m^4}{L^4} D_{21}^*,$$

$$R_5 = \frac{m^2 n^2 \pi^2 \left(\begin{array}{c} C_{11}^* + C_{22}^* - C_{66}^* \\ -J_{21} - J_{12} - 2J_{66} \end{array} \right)}{R^2 L^2},$$

$$R_2 = \frac{n^2 \pi^2 m^2}{L^2 R^2} (D_{11}^* + D_{22}^* + D_{66}^*) + \frac{1}{9} \frac{n^4}{R^4} D_{12}^* + 9 \frac{\pi^4 m^4}{L^4} D_{21}^*,$$

$$R_8 = \frac{n^4(C_{12}^* - J_{22})}{R^4} + \frac{m^4\pi^4(C_{21}^* - J_{11})}{L^4},$$

$$J_{11} = C_{11}D_{11}^* + C_{12}D_{21}^*, J_{12} = C_{11}D_{12}^* + C_{12}D_{22}^*,$$

$$J_{21} = C_{21}D_{11}^* + C_{22}D_{21}^*, J_{22} = C_{21}D_{12}^* + C_{22}D_{22}^*,$$

$$J_{66} = -C_{66}D_{66}^*, G_{11} = C_{11}C_{11}^* + C_{12}C_{21}^* - B_{11},$$

$$G_{12} = C_{11}C_{12}^* + C_{12}C_{22}^* - B_{12},$$

$$G_{21} = C_{21}C_{11}^* + C_{22}C_{21}^* - B_{21},$$

$$G_{22} = C_{21}C_{12}^* + C_{22}C_{22}^* - B_{22},$$

$$G_{66} = C_{66}C_{66}^* - 2B_{66}.$$

Bằng cách cộng ba biên độ độ võng, độ võng cực đại được tính toán và được viết qua biên độ f_2 , như sau:

$$\begin{aligned} W_{max} = f_0 + f_1 + f_2 = & \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} f_2^2 + \frac{\lambda_{12}\lambda_{24} - \lambda_{13}\lambda_{22}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} f_2 \\ & + \frac{2\lambda_{22}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} q + \frac{\lambda_{12}\lambda_{26}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} + \left[-\frac{\lambda_{23}\lambda_{11}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} f_2^2 - \frac{\lambda_{11}\lambda_{24} - \lambda_{13}\lambda_{21}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} f_2 \right. \\ & \left. - \frac{2\lambda_{21}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} q - \frac{\lambda_{11}\lambda_{26}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} \right]^{\frac{1}{2}} + f_2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Biên độ f_0 và f_2 đạt được từ các phương trình (4.38) và (4.40), sau đó thế các biên độ này vào biểu thức (4.39), ta có thể thu được như sau:

$$q = -\frac{\delta_{11}f_2^3 + \delta_{12}f_2^2 + \delta_{13}f_2 + \delta_{18}}{\delta_{15}f_2 + \delta_{17}}, \quad (4.42)$$

trong đó:

$$\delta_{10} = 1/(\lambda_{22}\lambda_{11} - \lambda_{21}\lambda_{12}), \delta_{11} = -\lambda_{33}\lambda_{23}\lambda_{11}\delta_{10},$$

$$\delta_{12} = [\lambda_{33}(\lambda_{13}\lambda_{21} - \lambda_{11}\lambda_{24}) + (\lambda_{31}\lambda_{12} - \lambda_{32}\lambda_{11})\lambda_{23}]\delta_{10},$$

$$\delta_{13} = [(\lambda_{21}\lambda_{32} - \lambda_{22}\lambda_{31})\lambda_{13} + (\lambda_{24}\lambda_{31} - \lambda_{21}\lambda_{34})\lambda_{12} + (\lambda_{22}\lambda_{34} - \lambda_{24}\lambda_{32} - \lambda_{26}\lambda_{33})\lambda_{11}]\delta_{10},$$

$$\delta_{15} = -2\lambda_{33}\lambda_{21}\delta_{10},$$

$$\delta_{14} = [(\lambda_{14}\lambda_{33} - \lambda_{12}\lambda_{35})\lambda_{21} + (\lambda_{22}\lambda_{35} - \lambda_{25}\lambda_{33})\lambda_{11}]\delta_{10},$$

$$\delta_{16} = [(\lambda_{21}\lambda_{32} - \lambda_{22}\lambda_{31})\lambda_{14} + (\lambda_{25}\lambda_{31} - \lambda_{21}\lambda_{36})\lambda_{12} + (\lambda_{22}\lambda_{36} - \lambda_{25}\lambda_{32})\lambda_{11}]\delta_{10},$$

$$\delta_{17} = [(\lambda_{12} - 2\lambda_{32})\lambda_{21} - \lambda_{22}(\lambda_{11} - 2\lambda_{31})]\delta_{10},$$

$$\delta_{18} = \lambda_{26}(\lambda_{12}\lambda_{31} - \lambda_{11}\lambda_{32})\delta_{10}.$$

Đường cong sau mất ổn định $W_{\max} - q$ được xác định bằng cách kết hợp các quan hệ $W_{\max} - f_2$ và $q_0 - f_2$. Bằng cách cho $f_2 \rightarrow 0$ trong phương trình (4.42), áp lực ngoài mất ổn định cận trên của vỏ có gân đặt được theo tiêu chuẩn ổn định rẽ nhánh [1, 6] như sau:

$$q^{upper} = -\frac{\delta_{18}}{\delta_{17}}. \quad (4.43)$$

Áp lực ngoài mất ổn định tới hạn q^{cr} là giá trị tối thiểu của áp lực ngoài mất ổn định cận trên với tất cả các mode mất ổn định m và n .

4.5. Kết quả số và thảo luận

4.5.1. Kết quả so sánh

Luận án đã so sánh áp lực ngoài mất ổn định tới hạn với công trình của Shen và cộng sự [125]. Việc xác nhận tải áp lực ngoài mất ổn định tới hạn của vỏ trụ FGM với các chỉ số tỷ phần thể tích khác nhau của FGM được thể hiện ở Bảng 4.1.

Bảng 4.1. So sánh tải áp lực ngoài mất ổn định tới hạn $\bar{q}^{cr} = q^{cr}h$ (kPa.m) của vỏ trụ FGM với các chỉ số đặc trưng tỷ phần thể tích khác nhau ($R/h = 400$, $h = 1\text{mm}$, $L = \sqrt{500Rh}$)

N	0.2	1	2	5
Shen và cộng sự [125]	81.325(1,11)*	71.151(1,11)	67.389(1,11)	63.756(1,11)
Luận án	89.217(1,11)	75.506(1,11)	70.491(1,11)	65.817(1,11)

* Mode mất ổn định (m, n)

Bảng 4.2. So sánh áp lực ngoài mất ổn định tới hạn q^{cr} (lb/in²) đối với vỏ trụ có gân và không gân đẳng hướng.

	Không gân	Gân dọc	Gân đai	Gân trục giao
Baruch và Singer [12]	102	103	370	377
Reddy và Starnes [120]	93.5	94.7	357.5	365
Shen [122]	100.7(1,4)	102.2(1,4)	368.3(1,3)	374.1(1,3)
Luận án	103.3(1,4)	104.5(1,4)	379.7(1,3)	387.2(1,3)

Tiếp theo, so sánh áp lực ngoài mất ổn định tới hạn của vỏ trụ đẳng hướng với các gân đai và/hoặc gân dọc với công trình của Baruch và Singer [12], Reddy và Starnes [120], và Shen [122] trong Bảng 4.2.

Như có thể quan sát được trong hai bảng này, các kết quả của luận án phù hợp tốt với các kết quả trước đây.

4.5.2. Các ví dụ số

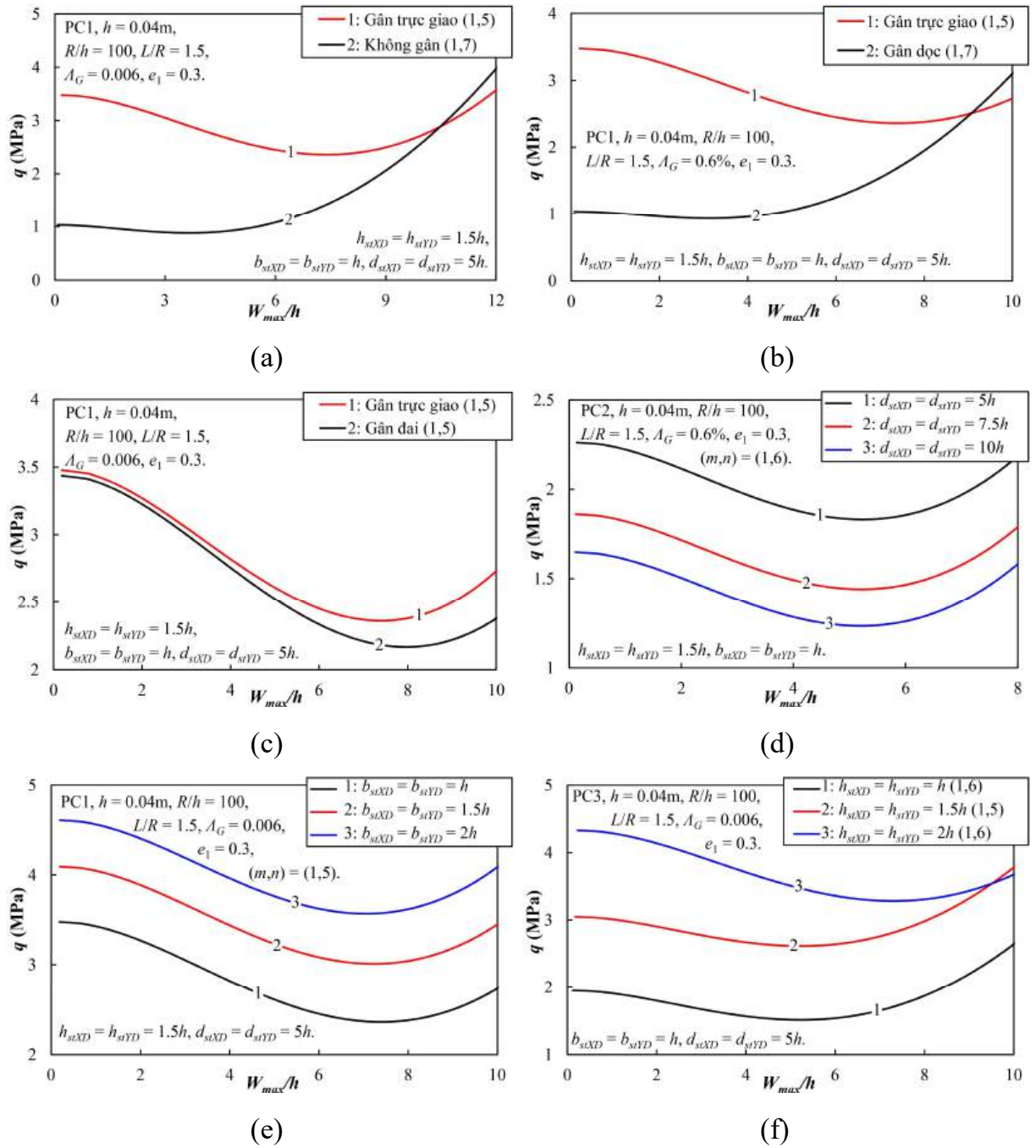
4.5.2.1. Bài toán 1: Vỏ trụ FG-GPLRC rỗng có gân tăng cứng trực giao

Để làm sáng tỏ kết quả lý thuyết của thuật toán này, vỏ trụ có gân được chế tạo từ FG-GPLRC rỗng với nền đồng (Cu). Các thông số của vật liệu có thể được lựa chọn bởi Wang và các cộng sự [160]. Do sự chiếm ưu thế của các mode mất ổn định tới hạn, tải áp lực ngoài mất ổn định tới hạn và đường cong sau mất ổn định dưới đây đều được khảo sát ở các mode tới hạn.

Bảng 4.3. Tải mất ổn định tới hạn của vỏ trụ có gân FG-GPLRC rỗng có phân bố độ rỗng và hệ số độ rỗng khác nhau (MPa, $L/R=1.5$, $h=0.04\text{m}$, $R/h=100$, $W_{GPL}=0.6\%$, $h_{stXD}=h_{stYD}=1.5h$, $b_{stXD}=b_{stYD}=h$, $d_{stXD}=d_{stYD}=5h$)

	e_1	0	0.1	0.2	0.3	0.5
Không tăng cường	PC1	1.178(1,7)	1.129(1,7)	1.080(1,7)	1.030(1,7)	0.932(1,7)
	PC2	1.178(1,7)	1.059(1,7)	0.942(1,7)	0.828(1,7)	0.613(1,7)
	PC3	1.178(1,7)	1.103(1,7)	1.027(1,7)	0.950(1,7)	0.793(1,7)
Gân trực giao	PC1	3.779(1,6)	3.687(1,6)	3.592(1,6)	3.477(1,5)	3.174(1,5)
	PC2	3.779(1,6)	3.275(1,6)	2.769(1,6)	2.262(1,6)	1.251(1,6)
	PC3	3.779(1,6)	3.538(1,6)	3.294(1,6)	3.048(1,6)	2.544(1,6)

Bảng 4.3 khảo sát tải mất ổn định tới hạn của vỏ FG-GPLRC rỗng không gân và có gân với sự phân bố độ rỗng và hệ số độ rỗng khác nhau. Do sự phân bố độ rỗng chủ yếu ở vùng gần mặt trung bình của vỏ nên độ cứng của vỏ PC1 là lớn nhất và tải mất ổn định tới hạn có thể thu được trong kết quả khảo sát. Tác dụng rất lớn của gân cũng được kiểm tra trong bảng này. Như được quan sát trong phương trình (4.6), mô đun đàn hồi của các vỏ PC1 có gân tăng cứng là lớn nhất dẫn đến tải mất ổn định tới hạn của vỏ cứng PC1 vượt trội hơn so với hai phân bố còn lại. Ngoài ra, tải mất ổn định tới hạn của vỏ giảm khi hệ số rỗng tăng, giảm nhẹ đối với phân bố PC1 và tăng đối với phân bố PC2 và PC3. Kết quả cũng cho thấy áp lực ngoài mất ổn định tới hạn của vỏ PC1 là lớn nhất còn PC2 là nhỏ nhất.

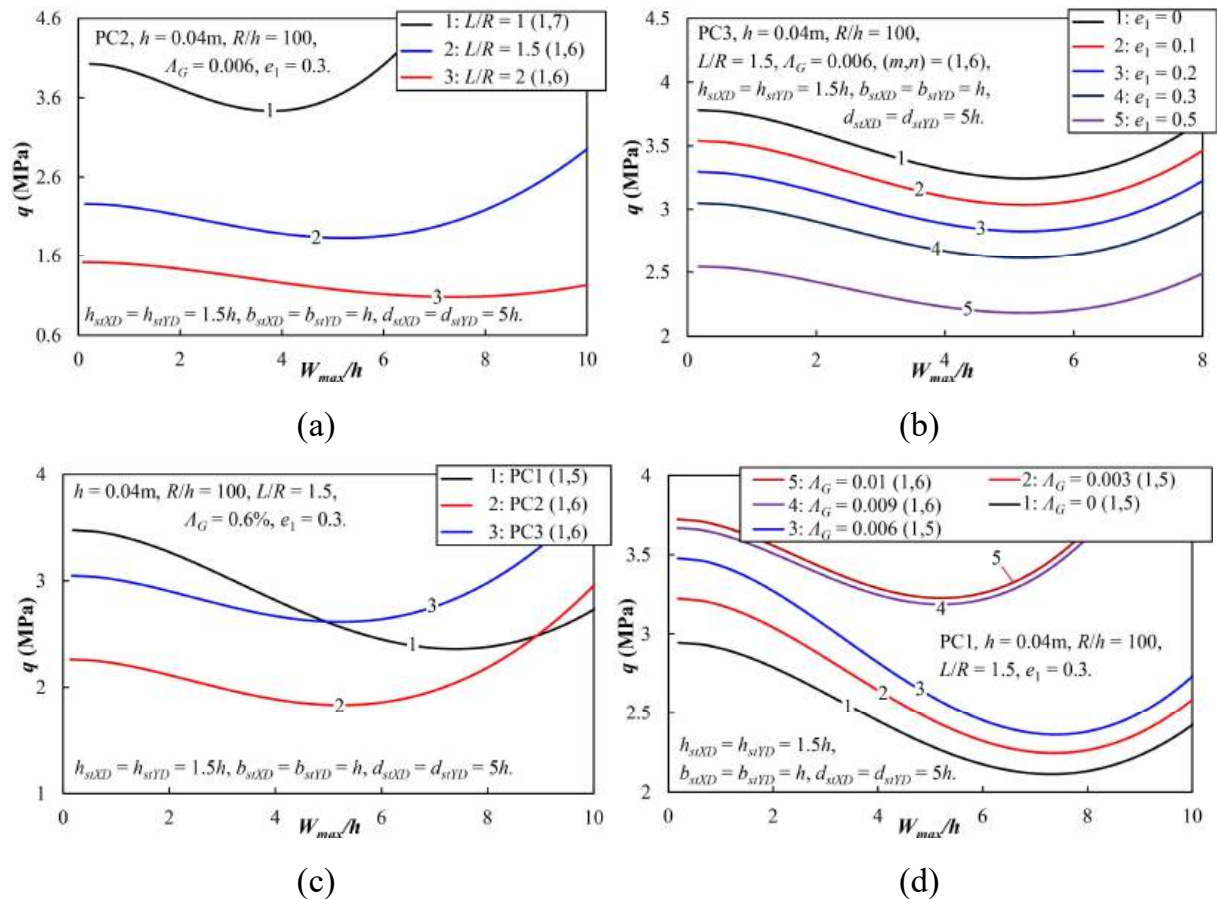


Hình 4.3. Ảnh hưởng của gân FG-GPLRC rỗng đến đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC rỗng

Hình 4.3 trình bày ảnh hưởng của gân đến đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC rỗng với gân. Sự khác biệt giữa các đường cong sau mất ổn định của vỏ có gân trục giao và vỏ không gân được trình bày trên Hình 4.3a, giữa các đường cong sau mất ổn định của vỏ có gân trục giao và vỏ có gân dọc được thể hiện trên Hình 4.3b, giữa các đường cong sau mất ổn định của vỏ có gân trục giao và vỏ có gân dài được trình bày trong Hình 4.3c. Do các đặc tính phi tuyến và các mode mất ổn định tới hạn khác nhau,

các đường cong sau mất ổn định phi tuyến có xu thế tương đối phức tạp như có thể thấy trong hình.

Hình 4.3a và 4.3b cho thấy khả năng chịu tải của vỏ có gân trực giao và gân dọc tương ứng vượt trội hơn so với vỏ không gân trong miền độ võng nhỏ nhưng trong trường hợp độ võng đủ lớn thì có thể quan sát thấy xu hướng ngược lại. Có thể thấy được sự khác biệt lớn giữa các đường cong sau mất ổn định giữa trường hợp vỏ có gân trực giao và không gân, giữa vỏ có gân trực giao và vỏ có gân dọc, khác biệt nhỏ được ghi nhận giữa vỏ có gân trực giao và vỏ có gân đai. Trong trường hợp vỏ có gân trực giao và vỏ có gân đai, vỏ có gân dọc và không gân có thể thấy rõ hiện tượng snap-through. Ngoài ra, ảnh hưởng của khoảng cách giữa các gân, chiều rộng gân và chiều cao gân được nghiên cứu trong Hình 4.3d, e và f tương ứng. Có thể thấy, ảnh hưởng lớn nhất thu được khi thay đổi chiều cao gân.



Hình 4.4. Ảnh hưởng của các thông số hình học và vật liệu đến đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC rỗng có gân

Hình 4.4 thể hiện ảnh hưởng của các đặc tính hình học và vật liệu đến đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC rỗng có gân. Hình 4.4a khảo sát tác động của

chiều dài vỏ lên đường cong sau mất ổn định của vỏ có gân. Rõ ràng, tải mất ổn định tới hạn giảm mạnh khi chiều dài vỏ tăng lên. Hình 4.4b, c và d cho thấy ảnh hưởng lớn của hệ số độ rỗng, phân bố độ rỗng và tỷ phần khối lượng GPL lên đường cong sau mất ổn định của vỏ. Trong khi xu hướng tăng/giảm đều đặn của các đường cong sau mất ổn định với các mode mất ổn định giống nhau $(m,n)=(1,6)$ được quan sát thấy khi hệ số độ rỗng thay đổi (Hình 4.4b), xu hướng phức tạp thu được khi thay đổi phân bố độ rỗng và tỷ phần khối lượng GPL (Hình 4.4c, d) với hai mode (m,n) khác nhau.

4.5.2.2. Bài toán 2: Vỏ trụ FG-GPLRC có gân tăng cứng FG-GPLRC xoắn ốc

Trong phần này, đồng (Cu) được chọn làm vật liệu nền và các đặc tính vật liệu cũng như thông số hiệu dụng của GPL và nền được tham khảo trong công trình của Wang và cộng sự [160].

Trừ khi có các ghi chú khác, các thông số hình học của vỏ được chọn như sau $h = 0.02$ m, $R/h = 80$, $L = 1.5R$, và của gân được chọn $h_{stXD} = h_{stYD} = h_{stSPR} = 0.04$ m, $b_{stXD} = b_{stYD} = b_{stSPR} = 0.02$ m, $d_{stXD} = d_{stYD} = d_{stSPR} = 0.08$ m. Có thể thấy rằng các gân trục giao và gân xiên được chọn có cùng mặt cắt ngang gân và với lượng vật liệu gân trục giao và gân xiên là bằng nhau.

Bảng 4.4 thể hiện ảnh hưởng của loại gân đến áp lực ngoài mất ổn định tới hạn của vỏ trụ FG-GPLRC. Kết quả cho thấy ảnh hưởng lớn của các gân đến áp lực ngoài tới hạn của vỏ. Tải trọng áp lực ngoài tới hạn của các gân tăng cứng dạng xoắn ốc lớn hơn của các gân tăng cứng trục giao có cùng lượng vật liệu gân.

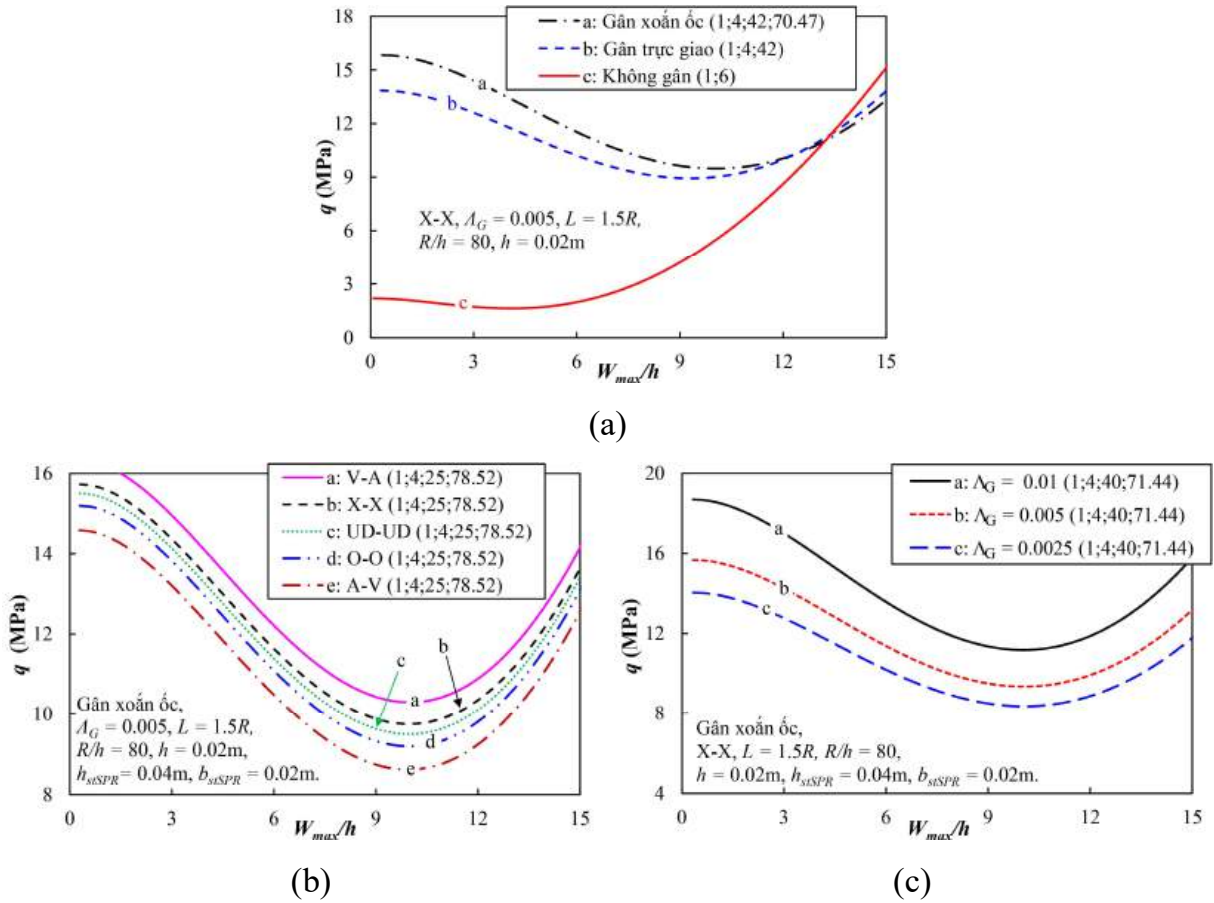
Bảng 4.4. Tải mất ổn định tới hạn của vỏ trụ FG-GPLRC không gân, gân trục giao và gân xoắn ốc

	Không gân	Gân trục giao	Gân xoắn ốc
UD-UD	2.0504(1,7)	11.6329(1,5)	15.6318(1,4,42,70.47)*
X-X	2.1871(1,6)	11.8650(1,5)	15.8350(1,4,42,70.47)
A-V	2.0218(1,7)	10,6680(1,5)	14.3298(1,5,42,70.47)
V-A	2.0115(1,7)	12.5163(1,5)	16.4522(1,4,42,70.47)
O-O	1.8645(1,7)	11.3340(1,5)	15.2994(1,5,42,70.47)

* (m,n,n_l,θ) .

Các đường cong sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC không gân, gân trục giao và gân xoắn ốc được trình bày trên Hình 4.5a. Trong miền độ võng nhỏ, các đường cong

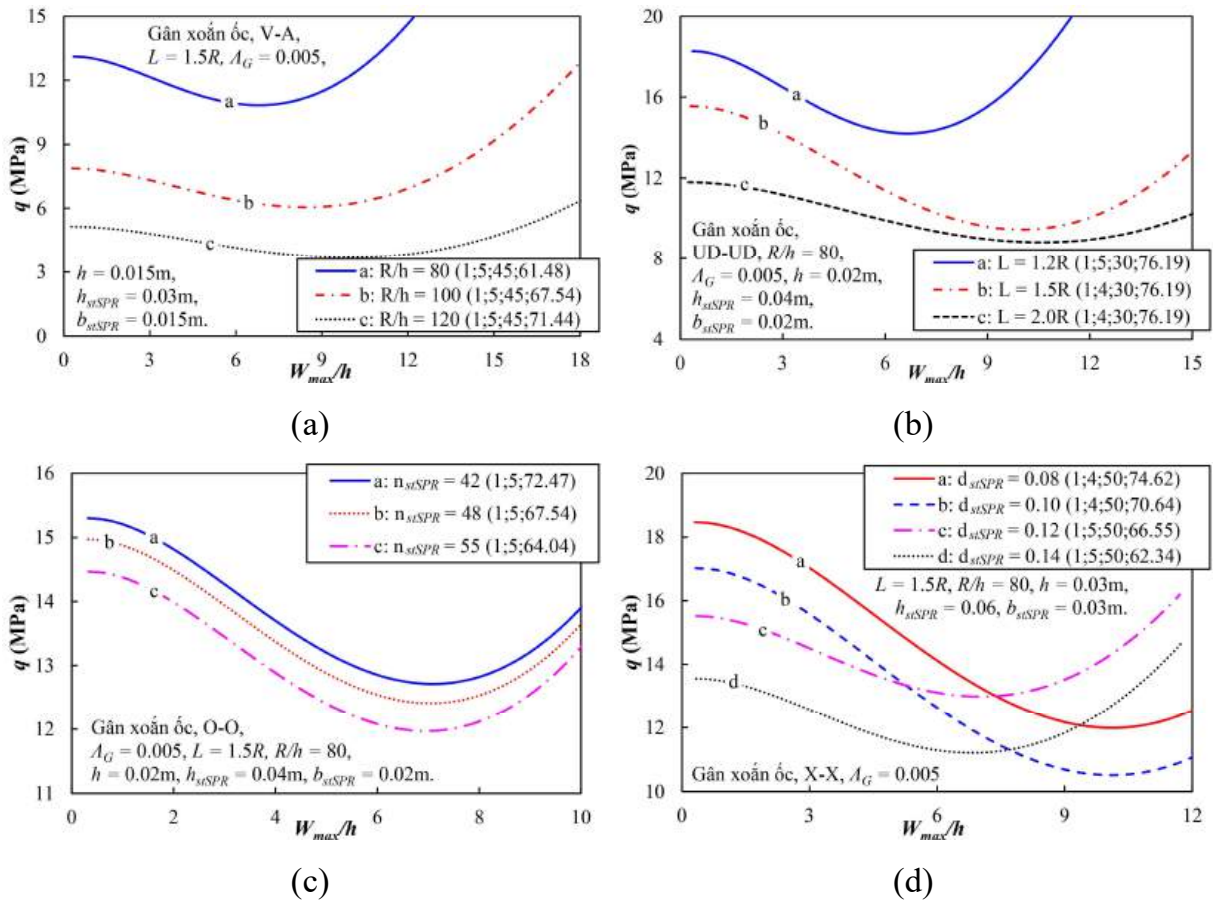
sau mất ổn định của vỏ có gân xoắn ốc cao hơn so với các đường cong sau mất ổn định của vỏ không gân và gân trực giao. Ngược lại, đường cong sau mất ổn định của vỏ có gân xoắn ốc thấp hơn đường cong sau mất ổn định của vỏ có gân trực giao khi độ võng đủ lớn. Hiện tượng snap-through được quan sát rõ ràng hơn đối với vỏ có độ cứng xoắn ốc nhưng ít được quan sát rõ ràng hơn ở vỏ không có gân tăng cứng và vỏ có gân tăng cứng trực giao.



Hình 4.5. Ảnh hưởng của loại gân và các thông số vật liệu đến đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC

Các đường cong sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC tăng cứng bởi gân xoắn ốc với các phân bố GPL khác nhau và các tỷ phần khối lượng GPL khác nhau được trình bày trong Hình 4.5b và 4.5c. Tương tự như Bảng 4.4, áp lực ngoài mất ổn định tới hạn và khả năng chịu tải sau mất ổn định của vỏ FG-V có gân xoắn ốc là lớn nhất (Hình 4.5b). Mặc dù các đường cong sau mất ổn định có xu hướng cao hơn khi tỷ phần khối lượng GPL tăng lên, tuy nhiên xu hướng của các đường cong không thay đổi đáng kể (Hình 4.5c).

Hình 4.6a cho thấy các đường cong sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC có gân với các tỷ lệ R/h khác nhau. Khả năng chịu tải sau mất ổn định của vỏ tăng khi tỷ số R/h này giảm. Hình 4.6b cho thấy các đường cong sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC có gân với các chiều dài vỏ khác nhau. Khả năng chịu tải sau mất ổn định của vỏ tăng khi chiều dài giảm. Ảnh hưởng của số lượng gân và khoảng cách gân đến ứng xử sau mất ổn định của vỏ được trình bày lần lượt trên Hình 4.6c và 4.6d. Kết quả cho thấy khả năng chịu tải sau mất ổn định tăng khi số lượng gân tăng ở tất cả các vùng độ võng. Ngược lại, khi khoảng cách gân giảm thì khả năng chịu tải sau mất ổn định tăng ở vùng có độ võng nhỏ. Có thể thấy được một số xu hướng bất thường ở vùng có độ võng lớn.



Hình 4.6. Ảnh hưởng của các thông số hình học của vỏ và gân đến đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC

4.6. Kết luận chương 4

Chương 4 đã phân tích phi tuyến tĩnh về ổn định vỏ trụ FG-GPLRC và FG-GPLRC rỗng chịu áp lực ngoài có gân tăng cứng trực giao và xoắn ốc FG-GPLRC và FG-GPLRC rỗng tương ứng; lý thuyết vỏ Donnell kết hợp với các thành phần phi tuyến hình học của

von Karman và kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến dành cho gân xoắn ốc FG-GPLRC, các phương trình cơ bản của hệ đã được xây dựng; độ võng được lựa chọn với ba số hạng và phương pháp năng lượng Ritz được sử dụng, kết hợp với điều kiện chu vi kín để nhận được hệ phương trình ổn định phi tuyến của vỏ; tải tới hạn và biểu thức tải - độ võng sau mất ổn định nhận được dưới dạng hiển. Một số nhận xét thu được như sau:

- Các gân có ảnh hưởng lớn đến tải tới hạn và đáp ứng sau mất ổn định của kết cấu được xem xét; tải tới hạn và khả năng chịu tải sau mất ổn định của vỏ tăng mạnh khi được bổ sung gân; hiệu quả của gân xoắn ốc lớn hơn đáng kể so với gân trực giao với cùng lượng gân thêm vào.

- Cường độ snap-through được thể hiện một cách nổi bật với trực giao và gân đai, và khó quan sát hơn trong các trường hợp vỏ không gân. Đặc biệt là hiện tượng snap-through thể hiện rõ nhất với vỏ có gân xoắn ốc.

- Có thể quan sát được những ảnh hưởng lớn của tính chất hình học, vật liệu, hệ số độ rỗng, sự phân bố lỗ rỗng và tỷ phần khối lượng GPL lên tải mất ổn định tới hạn và đường cong sau mất ổn định của vỏ.

KẾT LUẬN

Luận án đã thu được một số kết quả mới sau đây:

1. Đã đề xuất phương án tăng cường cho kết cấu tấm tròn và chòm cầu thoải FG-GPLRC và FG-GPLRC lõi rỗng bằng hệ gân mạng nhện hai vùng và gân mạng nhện ba vùng; đã phát triển kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến cho gân mạng nhện hai vùng và ba vùng làm bằng FG-GPLRC phù hợp với lý thuyết vỏ Donnell; đã xây dựng lời giải giải tích và bán giải tích cho bài toán ổn định và động lực phi tuyến của kết cấu chịu tải cơ và nhiệt dựa trên lý thuyết vỏ Donnell và phương pháp năng lượng, có xét tới ảnh hưởng của lớp áp điện và nền đàn hồi phi tuyến.

2. Đã đề xuất phương án tăng cường cho kết cấu panel có độ cong phức tạp, bao gồm panel trụ, panel parabol và panel hình sin làm bằng FG-CNTRC và FG-GRC bằng hệ gân trực giao FG-CNTRC và FG-GRC tương ứng; đã áp dụng kỹ thuật san tác dụng gân cải tiến cho gân làm bằng FG-CNTRC và FG-GRC phù hợp với HSDT; đã xây dựng lời giải giải tích và bán giải tích cho bài toán ổn định và động lực phi tuyến của kết cấu chịu tải trọng cơ trong môi trường nhiệt dựa trên HSDT và phương pháp năng lượng có xét tới ảnh hưởng của lớp áp điện và nền đàn hồi phi tuyến.

3. Đã đề xuất phương án tăng cường cho kết cấu vỏ trụ FG-GPLRC rỗng và FG-GPLRC bằng hệ gân trực giao và gân xoắn FG-GPLRC rỗng và FG-GPLRC tương ứng; đã cải tiến kỹ thuật san tác dụng gân dành cho gân xoắn ốc FG-GPLRC phù hợp với lý thuyết vỏ Donnell; đã xây dựng lời giải giải tích và bán giải tích cho bài toán ổn định tĩnh phi tuyến của kết cấu chịu tải trọng cơ dựa trên lý thuyết vỏ Donnell và phương pháp năng lượng.

4. Đã ứng dụng các kết quả tính toán dưới dạng giải tích và bán giải tích vào phân tích chi tiết các ảnh hưởng của gân trong các bài toán tương ứng, nền đàn hồi phi tuyến, sự không hoàn hảo về hình dạng của tấm tròn và vỏ cầu thoải FG-GPLRC, và panel có độ cong phức tạp FG-CNTRC và FG-GRC, kích thước hình học, các cách thiết kế gân, quy luật phân bố vật liệu và tỷ phần thể tích CNT và graphene tới ứng xử ổn định tĩnh, động và dao động phi tuyến của tấm, vỏ. Những thảo luận và nhận xét đã được đưa ra từ các ví dụ khảo sát số cho thấy ứng xử phi tuyến phức tạp của các kết cấu, góp phần làm cơ sở để xây dựng các tiêu chuẩn thiết kế kết cấu công trình dạng tấm và vỏ nanocomposite có gân tăng cường.

Nội dung chủ yếu của luận án được công bố trong 09 công trình khoa học, trong đó có 05 công trình trên các tạp chí khoa học quốc tế ISI (SCIE), 02 bài báo trên tuyển tập công trình hội nghị khoa học cơ học toàn quốc, và 02 bài báo đăng trên tạp chí khoa học trong nước.

KIẾN NGHỊ VỀ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

1. Nghiên cứu ổn định và động lực phi tuyến của chòm cầu và tấm tròn nanocomposite có gân tăng cứng theo các lý thuyết biến dạng trượt có xét tới tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ.
2. Nghiên cứu ổn định và động lực phi tuyến của vỏ thoải nanocomposite có gân tăng cứng có độ cong phức tạp theo hai phương.
3. Nghiên cứu ổn định và động lực phi tuyến của vỏ trụ và vỏ tròn nanocomposite có gân tăng cứng theo các lý thuyết biến dạng trượt.
4. Nghiên cứu ổn định và động lực phi tuyến của tấm và vỏ nanocomposite có gân tăng cứng chịu các loại tải trọng phức tạp, như tải khí động, tải ngẫu nhiên.
5. Nghiên cứu xây dựng các tiêu chuẩn thiết kế, có xét tới bài toán tối ưu kết cấu dạng tấm vỏ nanocomposite có gân tăng cứng cho các công trình xây dựng.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

Trong thời gian thực hiện, luận án đã công bố được 09 công trình với 05 công trình trên các tạp chí khoa học quốc tế ISI (SCIE), 02 công trình trên các tạp chí khoa học trong nước và 02 công trình trên Tuyển tập công trình khoa học quốc gia. Trong 09 công trình này, có 02 công trình là tác giả chính (số 2, số 7) và 01 công trình là tác giả liên hệ (số 4). Cụ thể các công trình như sau:

1. Vu Hoai Nam, Tran Quang Minh, Pham Thanh Hieu, Vu Tho Hung, Bui Tien Tu, Nguyen Thi Thanh Hoai, Dang Thuy Dong, A new analytical approach for nonlinear thermo-mechanical postbuckling of FG-GPLRC circular plates and shallow spherical caps stiffened by spiderweb stiffeners, *Thin-Walled Structures* 2023;193:111296. (SCIE, Q1)
2. Tran Quang Minh, Vu Hoai Nam, Vu Minh Duc, Vu Tho Hung, Le Ngoc Ly, Nguyen Thi Phuong. Nonlinear vibration and dynamic buckling responses of stiffened functionally graded graphene-reinforced cylindrical, parabolic, and sinusoid panels using the higher-order shear deformation theory. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 2024;104:e202300580. (SCIE, Q2)
3. Vu Minh Duc, Tran Quang Minh, Nguyen Thi Phuong, Vu Tho Hung, Vu Hoai Nam, Nonlinear dynamic responses of CNT-reinforced panels with complex curvature, piezoelectric layer, and CNT-reinforced stiffeners, *European Journal of Mechanics – A/Solids* 2024;106:105341. (SCIE, Q1)
4. Luu Ngoc Quang, Vu Minh Duc, Tran Quang Minh. Nonlinear buckling and postbuckling behaviors of porous FG-GPLRC cylindrical shells with stiffeners subjected to external pressure. *Journal of Science and Transport Technology* 2024;4(2):24-36.
5. Vũ Minh Đức, Trần Quang Minh, Đỗ Thị Kiều My, Cao Văn Đoàn, Nguyễn Văn Tiến. Nonlinear buckling analysis of spirally stiffened functionally graded graphene platelet reinforced cylindrical shells subjected to external pressure. *Tuyển tập công trình hội nghị cơ học toàn quốc. Kỷ niệm 45 năm thành lập Viện Cơ học, Hà Nội, 09/4/2024.* 130-140.

6. Dang Thuy Dong, Cao Van Doan, Vu Tho Hung, Tran Quang Minh. Nonlinear buckling of the FG-GPLRC cylindrical and half-sinusoid panels reinforced by orthogonal stiffeners under axial compression load. Tuyển tập công trình hội nghị cơ học toàn quốc. Kỷ niệm 45 năm thành lập Viện Cơ học, Hà Nội, 09/4/2024. 186-195.
7. Tran Quang Minh, Vu Minh Duc, Dang Thuy Dong, Vu Hoai Nam. Nonlinear buckling analysis of higher-order shear deformable FG-CNTRC plates stiffened by oblique FG-CNTRC stiffeners. Vietnam Journal of Mechanics 2022;44(4):431–444.
8. Hoai Nam Vu, Quang Minh Tran, Van Tien Nguyen, Thanh Hieu Pham, Thi Phuong Nguyen. Nonlinear static and dynamic buckling analysis of GPL-reinforced spherical caps and circular plates with porous core and stepped spiderweb stiffeners. Applied Mathematical Modelling 2025;145:116123.
9. Hoai Nam Vu, Thanh Hieu Pham, Van Tien Nguyen, Quang Minh Tran, Thi Phuong Nguyen. Nonlinear Thermomechanical Static and Dynamic Buckling Responses of FG-GPLRC Spherical Caps and Circular Plates with Two-Step Spiderweb Stiffeners and a Piezoelectric Layer. Journal of Engineering Mechanics – ASCE 2025;151(7):04025028. DOI: 10.1061/JENMDT.EMENG-8363

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu tiếng Việt

- [1] Cao Văn Đoàn (2024). *Ổn định tĩnh đàn hồi phi tuyến của một số tấm và vỏ composite gia cường graphene chịu tải cơ trong môi trường nhiệt*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật. Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- [2] Đặng Thùy Đông (2017). *Phân tích ổn định và động lực phi tuyến của vỏ thoải sandwich cơ tính biến thiên chịu tác dụng của tải cơ và nhiệt*, Luận án tiến sĩ Cơ học. Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [3] Phạm Thanh Hiếu (2022). *Phân tích ổn định tĩnh của vỏ trụ và vỏ trống làm từ FGM và FG-CNTRC có kể đến tính đàn hồi của liên kết biên*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật. Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- [4] Vũ Hoài Nam (2015). *Phân tích phi tuyến động lực của vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên*, Luận án tiến sĩ Cơ học. Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [5] Nguyễn Thị Phương (2014). *Nghiên cứu ổn định tĩnh của tấm và vỏ Composite cơ tính biến thiên có gân gia cường lệch tâm*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật. Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội.
- [6] Nguyễn Văn Tiến (2024). *Ổn định đàn hồi phi tuyến của kết cấu công trình dạng tấm vỏ FG-CNTRC có tính tới các biện pháp tăng cứng*. Luận án tiến sĩ kỹ thuật. Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải.

Tài liệu tiếng Anh

- [7] Alibeigloo, A. (2016). Elasticity solution of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel subjected to thermo mechanical load. *Composites Part B: Engineering* 87, 214-226.
- [8] Amabili, M. (2008). *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press, New York.
- [9] Anh, V.T.T., Duc, N.D. (2016). Nonlinear response of a shear deformable S-FGM shallow spherical shell with ceramic-metal-ceramic layers resting on an elastic foundation in a thermal environment. *Mechanics of Advanced*

Materials and Structures 23, 926–934.

- [10] Reddy, A.B., Sai Ram, K.S. (2022). Buckling of functionally graded carbon nanotube reinforced composite cylindrical shell panel with a cutout under uniaxial compression. *Materials Today: Proceedings* 49 (5), 1865-1869.
- [11] Barati, M.R., Zenkour, A.M. (2019). Vibration analysis of functionally graded graphene platelet reinforced cylindrical shells with different porosity distributions. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 26(18), 1580-1588.
- [12] Baruch, M., Singer, J. (1963). Effect of eccentricity of stiffeners on the general instability of stiffened cylindrical shells under hydro-static pressure. *Journal of Mechanical Engineering Science* 5(1), 23–27.
- [13] Bich, D.H., Tung, H.V. (2011). Non-linear axisymmetric response of functionally graded shallow spherical shells under uniform external pressure including temperature effects. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46(9), 1195-1204.
- [14] Bich, D.H., Dung, D.V., Hoa L.K. (2012). Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects. *Composite Structures* 94(9), 2952-2960.
- [15] Bich, D.H., Phuong, N.T., Tung, H.V. (2012). Buckling of functionally graded conical panels under mechanical loads. *Composite Structures* 94(4), 1379-1384,
- [16] Bich, D.H., Nguyen, X.N. (2012). Nonlinear vibration of functionally graded circular cylindrical shells based on improved Donnell equations. *Journal of Sound and Vibration* 331(25), 5488-5501.
- [17] Bich, D.H., Dung, D.V., Nam, V.H. (2012). Nonlinear dynamical analysis of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical panels. *Composite Structures* 94(8), 2465-2473.
- [18] Bich, D.H., Dung, D.V., Nam, V.H. (2013). Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened imperfect functionally graded doubly curved thin shallow shells. *Composite Structures* 96, 384-395.

- [19] Bich, D.H., Dung, D.V., Nam, V.H., Phuong, N.T. (2013). Nonlinear static and dynamic buckling analysis of imperfect eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under axial compression. *International Journal of Mechanical Sciences* 74, 190-200.
- [20] Bich, D.H., Duc, N.D., Quan, T.Q. (2014). Nonlinear vibration of imperfect eccentrically stiffened functionally graded double curved shallow shells resting on elastic foundation using the first order shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences* 80, 16-28.
- [21] Bidzard, A., Malekzadeh, P., Mohebpour, S.R. (2019). Vibration of multilayer FG-GPLRC toroidal panels with elastically restrained against rotation edges. *Thin-Walled Structures* 143, 106209.
- [22] Bucco, D., Mazumdar, J. (1983). Estimation of the fundamental frequencies of shallow shells by a finite element-isodeformation contour method. *Computers & Structures* 17(3), 441-447
- [23] Bunch, J.S., van der Zande, A.M., Verbridge, S.S., Frank, I.W., Tanenbaum, D.M., Parpia, J.M., Craighead, H.G., McEuen, P.L. (2007). Electromechanical resonators from graphene sheets. *Science* 315, 490-493.
- [24] Chakraborty, S., Dey, T. (2023). Thermomechanical buckling and wrinkling characteristics of softcore sandwich panels with CNT reinforced composite face sheets. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 98, 104894.
- [25] Chen, H.Y., Li, W. (2024). Chaos and bifurcation analyses of functionally graded composite spherical shallow shells reinforced with graphene nanoplatelets, *Results in Physics* 58, 107461.
- [26] Chen, W., Peng, L., Sun, B., Chen, W., Fang, Y. (2024). A CO-HSDT isogeometric analysis for free vibration of matrix cracked FG-GPLRC plates coupled with stationary fluid. *Thin-Walled Structures* 205 (B), 112441.
- [27] Chen, X., Shen, H.S. (2022). Thermo-mechanical postbuckling analysis of sandwich cylindrical panels with functionally graded auxetic GRMMC core supported by elastic foundations. *Ocean Engineering* 247, 110661.
- [28] Cho, J.R. (2022). Nonlinear bending analysis of FG-CNTRC plate resting on elastic foundation by natural element method. *Engineering Analysis with*

Boundary Elements. 141, 65-74,

- [29] Doan, C.V., Hung, V.T., Phuong, N.T., Nam, V.H. (2023). Torsional buckling and postbuckling behavior of stiffened FG-GRCL toroidal shell segments surrounded by elastic foundation. *International Journal of Computational Materials Science and Engineering* 12(03), 2350001.
- [30] Doan, C.V., Nam, V.H., Phuong, N.T. (2023). Nonlinear Electro-Thermo-Torsional Buckling Analysis of Stiffened Functionally Graded Graphene-Reinforced Composite Laminated Toroidal Shell Segments. *Journal of Engineering Mechanics* 149(2), 04022106.
- [31] Dome spaces. Geodesic Domes: Why we love them. Truy cập ngày 20/12/2024 từ <https://domespaces.com/geodesic-domes-why-we-love-them/>
- [32] Dong, D.T., Dung, D.V. (2019). A third-order shear deformation theory for nonlinear vibration analysis of stiffened functionally graded material sandwich doubly curved shallow shells with four material models. *Journal of Sandwich Structures & Materials* 21(4), 1316-1356.
- [33] Dong, D.T., Nam, V.H., Trung, N.T., Phuong, N.T., Hung, V.T. (2022). Nonlinear thermomechanical buckling of sandwich FGM oblique stiffened plates with nonlinear effect of elastic foundation. *Journal of Thermoplastic Composite Materials* 35(10), 1441-1467.
- [34] Dong, D.T., Nam, V.H., Phuong, N.T., Ly, L.N., Duc, V.M., Tien, N.V., Minh, T.Q., Hung, V.T., Quan, P.H. (2022). An analytical approach of nonlinear buckling behavior of longitudinally compressed carbon nanotube-reinforced (CNTR) cylindrical shells with CNTR stiffeners in thermal environment. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 102, e202100228.
- [35] Dong, D.T., Hieu, P.T., Duc, V.M., Phuong, N.T., Tien, N.V., Nam, V.H. (2023). Nonlinear Buckling Analysis of Stiffened Carbon Nanotube-Reinforced Cylindrical Shells Subjected to External Pressure in Thermal Environment. *Mechanics of Composite Materials* 59, 779–794.
- [36] Dong, D.T., Phuong, N.T., Nam, V.H., Tien, N.V., Ly, L.N., Duc, V.M., Minh, T.Q., Hung, V.T., Giang, N.T.H. (2023). An Analytical Approach for Nonlinear Buckling Analysis of Torsionally Loaded Sandwich Carbon

- Nanotube Reinforced Cylindrical Shells with Auxetic Core. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics* 15, 468-484.
- [37] Dresselhaus, M. S., Dresselhaus, G. (2002). Intercalation compounds of graphite. *Advances in Physics* 51, 1-186.
 - [38] Duc, N.D., Tung, H.V. (2010). Nonlinear response of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels with temperature effects. *Composite Structures* 92(7), 1664-1672.
 - [39] Duc, N.D., Tung, H.V. (2010). Nonlinear analysis of stability for functionally graded cylindrical panels under axial compression. *Computational Materials Science* 49(4), S313-S316.
 - [40] Duc N.D., Tung H.V. (2011). Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations. *Composite Structures* 93(11): 2874-2881.
 - [41] Duc, N.D., Cong, P.H., Tuan, N.D., Phuong, T., Thanh, N.V. (2017). Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations. *Thin-Walled Structures* 115, 300-310.
 - [42] Duc, N.D., Quan, T.Q., Khoa N.D. (2017). New approach to investigate nonlinear dynamic response and vibration of imperfect functionally graded carbon nanotube reinforced composite double curved shallow shells subjected to blast load and temperature. *Aerospace Science and Technology* 71, 360-372.
 - [43] Duc, N.D., Hadavinia, H., Quan, T.Q., Khoa, N.D. (2019). Free vibration and nonlinear dynamic response of imperfect nanocomposite FG-CNTRC double curved shallow shells in thermal environment. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 75, 355-366.
 - [44] Dung, D.V., Hoa, L.K. (2013). Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure. *Thin-Walled Structures* 63, 117-124.
 - [45] Dung, D.V., Nam, V.H. (2014). Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under external pressure and surrounded by an elastic medium. *European Journal of*

Mechanics - A/Solids 46, 42-53,

- [46] Dung, D.V., Hoa, L.K., Nga, N.T. (2014). On the stability of functionally graded truncated conical shells reinforced by functionally graded stiffeners and surrounded by an elastic medium. *Composite Structures* 108, 77-90.
- [47] Dung, D.V., Dong, D.T. (2017). Nonlinear thermo-mechanical stability of eccentrically stiffened functionally graded material sandwich doubly curved shallow shells with general sigmoid law and power law according to third-order shear deformation theory. *Applied Mathematics and Mechanics* 38, 191-216.
- [48] Elmhaia, O., Askour, O., Sitli, Y., Mesmoudi, S., Rammane, M., Bourihane, O., Hilali, Y. (2024). Investigation of nonlinear buckling of FGM shells using a high-order finite continuation approach. *Finite Elements in Analysis and Design* 242, 104273.
- [49] Fan, Y., Shen, H.S., Xiang, Y. (2023). Nonlinear vibration characteristics of pre- and post-buckled FG-GRMMC laminated plates with in-plane auxeticity. *Engineering Structures* 274, 115068.
- [50] Gao, Z., Shi, X., Huang, Z., Zhong, R., Wang, Q. (2024). Spectro-geometric solutions for random vibration of functionally graded graphene platelet reinforced conical shells. *Thin-Walled Structures* 195, 111410.
- [51] Gholami, R., Ansari, R. (2018). Nonlinear harmonically excited vibration of third-order shear deformable functionally graded graphene platelet-reinforced composite rectangular plates. *Engineering Structures* 156, 197-209.
- [52] Gohardani, O., Elola, M.C., Elizetxea, C. (2014). Potential and prospective implementation of carbon nanotubes on next generation aircraft and space vehicles: A review of current and expected applications in aerospace sciences. *Progress in Aerospace Sciences* 70, 42-68.
- [53] Haboussi, M., Sankar, A., & Ganapathi, M. (2019). Nonlinear axisymmetric dynamic buckling of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite spherical caps. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 28(2), 127–140.
- [54] Salehipour, H., Shahmohammadi, M. A., Civalek, Ö. (2024). Natural

- frequencies and modal shapes of folded sandwich plates made of porous core and FG-CNTRC coating layers resting on two parameters elastic foundation. *Aerospace Science and Technology* 148, 109077.
- [55] He, D., Wang, Q., Zhong, R., Qin, B. (2023). A unified spectral-geometric model of FGM double conical/cylindrical/spherical shell coupled with annular plates, *Computers & Mathematics with Applications* 143, 348-371.
 - [56] Hieu, P.T., Tung, H.V. (2020). Thermomechanical postbuckling of pressure-loaded CNT-reinforced composite cylindrical shells under tangential edge constraints and various temperature conditions. *Polymer composites* 41(1), 244-257.
 - [57] Hieu, P.T., Tung, H.V. (2020). Thermal and thermomechanical buckling of shear deformable FG-CNTRC cylindrical shells and toroidal shell segments with tangentially restrained edges. *Archive of Applied Mechanics* 90, 1529-1546.
 - [58] Hieu, P.T., Tung, H.V. (2021). Nonlinear buckling behavior of functionally graded material sandwich cylindrical shells with tangentially restrained edges subjected to external pressure and thermal loadings. *Journal of Sandwich Structures & Materials* 23(6), 2000-2027.
 - [59] Hirata, M., Gotou, T., Horiuchi, S., Fujiwara, M., Ohba, M. (2004). Thin-film particles of graphite oxide 1: High-yield synthesis and flexibility of the particles. *Carbon* 42, 2929-2937.
 - [60] Hong, C.C. (2022). Advanced dynamic thermal vibration of thick FGM plates-cylindrical shells. *Ocean Engineering* 266 (1), 112701.
 - [61] Hu, H., Zhong, R., Wang, Q., Shi, X. (2024). Spectro-geometry dynamic analysis of FG-GPLRC cylindrical shell with periodically embedded dynamic vibration absorbers. *Thin-Walled Structures* 203, 112243.
 - [62] Hu, K., Kulkarni, D.D., Choi, I., Tsukruk, V.V. (2014). Graphene-polymer nanocomposites for structural and functional applications. *Progress in Polymer Science* 39, 1934-1972.
 - [63] Jalali, S.K., Naei, M.H., Pugno, N.M. (2015). Graphene-based resonant sensors for detection of ultra-fine nanoparticles: molecular dynamics and

- nonlocal elasticity investigations. *Nano* 10, 1550024.
- [64] Javani, M., Eslami, M. R., Kiani, Y. (2024). Dynamic buckling active control of FGM spherical shell with piezoelectric sensor and actuator layers. *Thin-Walled Structures* 205 (B), 112523,
 - [65] Kalnins A., Naghdi, P. M. (1960). Axisymmetric Vibrations of Shallow Elastic Spherical Shells. *The Journal of the Acoustical Society of America* 32(3), 342–347.
 - [66] Kiani, Y. (2016). Shear buckling of FG-CNT reinforced composite plates using Chebyshev-Ritz method. *Composites Part B: Engineering* 105, 176-187.
 - [67] Kiani, Y. (2016). Free vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates integrated with piezoelectric layers. *Computers and Mathematics with Applications* 72, 2433-2449.
 - [68] Kiani, Y., Mirzaei, M. (2017). Isogeometric thermal buckling analysis of temperature dependent FG graphene reinforced laminated plates using NURBS formulation. *Composite Structures* 180, 606-616.
 - [69] Kiani, Y., Mirzaei, M. (2018). Enhancement of non-linear thermal stability of temperature dependent laminated beams with graphene reinforcements. *Composite Structures* 186, 114-122.
 - [70] Kiani, Y. (2018). Isogeometric large amplitude free vibration of graphene reinforced laminated plates in thermal environment using NURBS formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 332, 86-101.
 - [71] Kiani, Y. (2019). Buckling of functionally graded graphene reinforced conical shells under external pressure in thermal environment. *Composites Part B: Engineering* 156, 128-137.
 - [72] Khayat, M., Baghlani, A., Najafgholipour, M. A. (2021). The effect of uncertainty sources on the dynamic instability of CNT-reinforced porous cylindrical shells integrated with piezoelectric layers under electro-mechanical loadings *Composite Structures* 273, 114336.
 - [73] Koizumi, M. (1993). The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials* 34, 3-10.

- [74] Kultur Og Borgerservice. Aarhusianerne strømmede til for at se 'The Dome'. Truy cập ngày 20/12/2024 từ <https://musikhusparken.aarhus.dk/indvielse-af-the-dome>
- [75] Kumar, R., Jana, P. (2023). Vibration response of FG-CNTRC plate resting on non-homogeneous elastic foundation via a closed-form dynamic stiffness formulation. *Structures* 57, 105203.
- [76] Lei, Z.X., Zhang, L.W., Liew, K.M. (2015). Buckling of FG-CNT reinforced composite thick skew plates resting on Pasternak foundations based on an element-free approach. *Applied Mathematics and Computation* 266, 773-791.
- [77] Lei, Z.X., Zhang, L.W., Liew, K.M. (2016). Vibration of FG-CNT reinforced composite thick quadrilateral plates resting on Pasternak foundations. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 64, 1-11.
- [78] Liu, T., Zheng, H., Guo, X., Zheng, Y. (2025). Internal resonance and nonlinear dynamics of an axially moving FGM sandwich cylindrical shell. *Thin-Walled Structures* 208, 112783.
- [79] Long, V.T., Tung, H.V. (2023). Postbuckling responses of porous FGM spherical caps and circular plates including edge constraints and nonlinear three-parameter elastic foundations, *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 51, 4214–4236.
- [80] Ly, L.N., Phuong, N.T., Nam, V.H., Trung, N.T., Duc, V.M. (2020). An Analytical Approach of Nonlinear Thermo-mechanical Buckling of Functionally Graded Graphene-reinforced Composite Laminated Cylindrical Shells under Compressive Axial Load Surrounded by Elastic Foundation. *Journal of Applied and Computational Mechanics* 6(2), 357-372.
- [81] Ly, L.N., Tu, B.T., Thu, D.T.N., Dong, D.T., Duc, V.M., Phuong, N.T. (2023). Nonlinear thermo-mechanical buckling and postbuckling of sandwich FG-GPLRC spherical caps and circular plates with porous core by using higher-order shear deformation theory. *Journal of Thermoplastic Composite Materials* 36(10), 4083-4105.
- [82] Mehar, K., Panda, S.K., Devarajan, Y., Choubey, G. (2019). Numerical buckling analysis of graded CNT-reinforced composite sandwich shell

- structure under thermal loading. *Composite Structures* 216, 406-414.
- [83] Mehri, M., Asadi, H., Wang, Q. (2016). Buckling and vibration analysis of a pressurized CNT reinforced functionally graded truncated conical shell under an axial compression using HDQ method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 303, 75-100.
 - [84] Minh, T.Q., Dong, D.T., Hung, V.T., Doan, C.V., Tien, N.V., Hieu, P.T. (2023). Geometrically Nonlinear Buckling of FG-CNTRC Plates Stiffened by FG-CNTRC Stiffeners Subjected to Combined Loads Using Nonlinear Reddy's HSDT. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 24 (12), 2450133.
 - [85] Mittal, G., Dhand, V., Rhee, K.Y., Park, S.J., Lee, W.R. (2015). A review on carbon nanotubes and grapheme as fillers in reinforced polymer nanocomposites. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry* 21, 11-25.
 - [86] Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, R.G. (1999). *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, London: Kluwer Academic Publishers.
 - [87] My, D.T.K., Duc, V.M., Giang, N.H., Phuong, N.T., Nam, V.H. (2024). Buckling and postbuckling of laterally pressured sandwich FG-GRC laminated toroidal shell segments with corrugated core in thermal environment. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 24 (4), 2450036.
 - [88] Nam, V.H., Phuong, N.T., Minh, K.V., Hieu, P.T. (2018). Nonlinear thermo-mechanical buckling and post-buckling of multilayer FGM cylindrical shell reinforced by spiral stiffeners surrounded by elastic foundation subjected to torsional loads. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 72, 393-406.
 - [89] Nam, V.H., Phuong, N.T., Trung, N.T. (2019). Nonlinear buckling and postbuckling of sandwich FGM cylindrical shells reinforced by spiral stiffeners under torsion loads in thermal environment. *Acta Mechanica* 230, 3183-3204.
 - [90] Nam, V.H., Phuong, N.T., Dong, D.T., Trung, N.T., Tue, N.V. (2019). Nonlinear thermo-mechanical buckling of higher-order shear deformable

- porous functionally graded material plates reinforced by orthogonal and/or oblique stiffeners. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 233(17), 6177-6196.
- [91] Nam, V.H., Dong, D.T., Phuong, N.T., Tuan, H.D. (2019). Nonlinear thermo-mechanical stability of multilayer-FG plates reinforced by orthogonal and oblique stiffeners according to FSDT. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 38(11), 521-536.
- [92] Nam, V.H., Phuong, N.T., Duc, V.M. (2019). Nonlinear buckling of orthogonal carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells under axial compression surrounded by elastic foundation in thermal environment. *International Journal of Computational Materials Science and Engineering* 8(4), 1950016.
- [93] Nam, V.H., Phuong, N.T., Bich, D.H. (2020). Buckling analysis of parallel eccentrically stiffened functionally graded annular spherical segments subjected to mechanic loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 27(7), 569-578.
- [94] Nam, V.H., Trung, N.T., Phuong, N.T., Duc, V.M., Hung, V.T. (2020). Nonlinear Torsional Buckling of Functionally Graded Carbon Nanotube Orthogonally Reinforced Composite Cylindrical Shells in Thermal Environment. *International Journal of Applied Mechanics* 12(07), 2050072.
- [95] Nam, V.H., Duc, V.M., Doan, C.V., Xuan, N.T.T., Phuong, N.T. (2022). Nonlinear postbuckling behavior of auxetic-core toroidal shell segments with Graphene reinforced face sheets under axial loads. *Archives of Mechanics* 74 (2-3), 89-108.
- [96] Nam, V.H., Dong, D.T., Doan, C.V., Phuong, N.T. (2022). Nonlinear thermo-electro-mechanical buckling of higher-order shear deformable stiffened FG-GRC laminated plates. *International Journal of Applied Mechanics* 14(06), 2250051.
- [97] Nam, V.H., Dong, D.T., Doan, C.V., Phuong, N.T. (2022). Nonlinear buckling of axially compressed FG-GRCL stiffened cylindrical panels with a piezoelectric layer by using Reddy's higher-order shear deformation theory.

Polymer composites 43(11), 7952-7966.

- [98] Nam, V.H., Phuong, N.T., Lanh, H.S., Duc, V.M., Doan, C.V. (2023). Nonlinear buckling analysis of stiffened FG-GRC laminated cylindrical shells subjected to axial compressive load in thermal environment. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 51(7), 3678-3694.
- [99] Nam, V.H., Doan, C.V., Phuong, N.T. (2023). A new analytical approach to the nonlinear buckling and postbuckling behavior of functionally graded graphene reinforced composite laminated cylindrical, parabolic, and half-sinusoid shallow imperfect panels. *Polymer Composites* 44(12), 8928-8945.
- [100] Nam V.H., Tu, B.T., Doan, C.V., Nam, P.N., Duc, V.M. (2024). A new semi-analytical approach for nonlinear dynamic responses of functionally graded porous graphene platelet-reinforced circular plates and spherical shells. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, doi:10.1177/09544062241282766
- [101] Nam, V.H., Tu, B.T., Hung, V.T., Doan, C.V., Phuong, N.T. (2024) Nonlinear thermomechanical buckling and postbuckling analysis of sandwich FG-GPLRC complexly curved caps and circular plates with porous core. *Acta Mechanica*. <https://doi.org/10.1007/s00707-024-04152-1>
- [102] Nam, V. H., Hung, V. T., Nhu Nam, P., Duc, V. M., Phuong, N. T. (2024). Nonlinear electro-thermo-mechanical dynamic behavior of complexly curved GPL-reinforced panels with auxetic core. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 1–17. <https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2425364>
- [103] Nexgen composite pipes. Exploring the Durability and Longevity of Composite Pipe Solutions. <https://nexgencomposite.com/best-composite-pipe-company-in-india/>
- [104] Ng, K.W., Lam W.H., Pichiah, S. (2013). A review on potential applications of carbon nanotubes in marine current turbines. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 28, 331-339.
- [105] Namazinia, N., Alibeiglloo, A., Karimiasl, M. (2024). Free vibration and static analysis of sandwich composite plate with auxetic core and GPLRC facing sheets in hygrothermal environment. *Forces in Mechanics* 15, 100264.

- [106] Novoselov, K.S., Geim, A.K., Morozov, S.V., Jiang, D., Zhang, Y., Dubonos, S.V., Grigorieva, I.V., Firsov, A. (2004). Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science* 306, 666-669.
- [107] Pal, G., Kumar, S. (2016). Modeling of carbon nanotubes and carbon nanotube-polymer composites. *Progress in Aerospace Sciences* 80, 33-58.
- [108] Phuong, N.T., Nam, V.H., Dong, D.T. (2020). Nonlinear vibration of functionally graded sandwich shallow spherical caps resting on elastic foundations by using first-order shear deformation theory in thermal environment. *Journal of Sandwich Structures & Materials* 22(4), 1157-1183.
- [109] Phuong, N.T., Trung, N.T., Doan, C.V., Thang, N.D., Duc, V.M., Nam, V.H. (2020). Nonlinear thermomechanical buckling of FG-GRC laminated cylindrical shells stiffened by FG-GRC stiffeners subjected to external pressure. *Acta Mechanica* 231, 5125-5144.
- [110] Phuong, N.T., Duc, V.M., Doan, C.V., Nam, V.H. (2021). Nonlinear torsional buckling of functionally graded graphene-reinforced composite (FG-GRC) laminated cylindrical shells stiffened by FG-GRC laminated stiffeners in thermal environment. *Polymer composite* 42(6), 3051-3063.
- [111] Phuong, N.T., Trung, N.T., Kien, T.D., Tuan, H.D., Nam, V.H. (2021). Nonlinear vibration of full-filled fluid corrugated sandwich functionally graded cylindrical shells. *Journal of Vibration and Control* 27(9-10), 1020-1035.
- [112] Phuong, N.T., Nam, V.H., Trung, N.T., Duc, V.M., Loi, N.V., Thinh, N.D., Tu, P.T. (2021). Thermomechanical postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated toroidal shell segments surrounded by Pasternak's elastic foundation. *Journal of Thermoplastic Composite Materials* 34(10), 1380-1407.
- [113] Phuong, N.T., Dong, D.T., Doan, C.V., Nam, V.H. (2022). Nonlinear buckling of higher-order shear deformable stiffened FG-GRC laminated plates with nonlinear elastic foundation subjected to combined loads. *Aerospace Science and Technology* 127, 107736.
- [114] Phuong, N.T., Dong, D.T., Tu, B.T., Duc, V.M., Khuong, L.N., Hieu, P.T.,

- Nam, V.H. (2023). Nonlinear thermo-mechanical axisymmetric stability of FG-GPLRC spherical shells and circular plates resting on nonlinear elastic medium. *Ships and Offshore Structures* 19(6), 820–830.
- [115] Phuong, N.T., Doan, C.V., Duc, V.M., Giang, N.T., Nam, V.H. (2023). Analytical solution for nonlinear buckling of convex and concave auxetic-core toroidal shell segments with graphene-reinforced face sheets subjected to radial loads. *Archives of Applied Mechanics* 93, 621–634.
- [116] Phuong, N.T., Duc, V.M., Dong, D.T., Doan, C.V., Hieu, P.T., Nam, V.H. (2023). An analytical approach of nonlinear buckling behavior of torsionally loaded auxetic core toroidal shell segments with graphene reinforced polymer coatings. *Advanced Composite Materials* 32(3), 400-418.
- [117] Phuong, N.T., Dong, D.T., Doan, C.V., Nam, V.H. (2023). Nonlinear buckling of stiffened FG-GRCL cylindrical panels under axial compression with the uniformly distributed temperature variation. *The European Physical Journal Plus* 138, 234.
- [118] Potts, J.R., Dreyer, D.R., Bielawski, C.W., Ruoff, R.S. (2011). Graphene-based polymer nanocomposites. *Polymer* 52, 5-25.
- [119] Raissi, H. (2020). Time-dependend stress analysis of a sector of the spherical sandwich shell with piezoelectric face sheets and FG-CNT core subjected to blast pressure. *Thin-Walled Structures* 157, 106864.
- [120] Reddy, J. N., Starnes, J. H. (1993). General buckling of stiffened circular cylindrical shells according to a Layerwise theory. *Composite Structures* 49, 605-616.
- [121] Saboori, R., Ghadiri, M. (2024). Nonlinear forced vibration analysis of PFG-GPLRC conical shells under parametric excitation considering internal and external resonances. *Thin-Walled Structures* 196, 111474,
- [122] Shen, H. S. (1998). Postbuckling analysis of imperfect stiffened laminated cylindrical shells under combined external pressure and thermal loading. *International Journal of Mechanical Sciences* 40(4), 339–355.
- [123] Shen, H.S. (2009). *Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. CRC Press, Taylor & Francis Group.

- [124] Shen, H.S. (2009). Postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. *International Journal of Mechanical Sciences* 51, 372-383.
- [125] Shen, H. S., Yang, J., Kitipornchai, S. Postbuckling of internal pressure loaded FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 29, (3), 448-460.
- [126] Shen, H.S., Zhang, C.L. (2010). Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates. *Materials and Design* 31, 3403-3411.
- [127] Shen, H.S. (2011). Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells. *Composite Structures* 93, 2096-2108.
- [128] Shen, H.S. (2011). Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part II: Pressure-loaded shells. *Composite Structures* 93, 2496-2503.
- [129] Shen, H.S. (2014). Postbuckling of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations subjected to lateral pressure under heat conduction. *International Journal of Mechanical Sciences* 89, 453-461.
- [130] Shen, H.S. (2014). Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments. *Composites Part B: Engineering* 60, 167-177.
- [131] Shen, H.S., Xiang, Y. (2014). Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments. *Composite Structures* 111, 291-300.
- [132] Shen, H.S., Xiang, Y., Lin F. (2017). Thermal buckling and postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates resting on elastic foundations. *Thin-Walled Structures* 118, 229-237.
- [133] Shen, H.S., Xiang, Y., Lin, F. (2017). Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 319, 175-193.

- [134] Shen, H.S., Xiang, Y. (2018). Postbuckling behavior of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells under axial compression in thermal environments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 330, 64-82.
- [135] Shen, H.S., Xiang, Y. (2018). Postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells subjected to external pressure in thermal environments. *Thin-Walled Structures* 124, 151-160.
- [136] Shen, H.S., Xiang, Y., Fan, Y., Hui, D. (2018). Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments. *Composites Part B: Engineering* 136, 177–186.
- [137] Shen, H.S., Xiang, Y. (2019). Thermal buckling and postbuckling behavior of FG-GRC laminated cylindrical shells with temperature-dependent material properties. *Meccanica* 54(1-2), 283-297.
- [138] Shen, H.S., Xiang, Y., Reddy, J.N. (2019). Thermal postbuckling behavior of FG-GRC laminated cylindrical panels with temperature-dependent properties. *Composite Structures* 211, 433-442.
- [139] Shen, H.S., Xiang, Y. (2021). Examination of thermal postbuckling behavior of temperature dependent FG-GRMMC laminated plates with in-plane negative Poisson's ratio. *Thin-Walled Structures* 163, 107801.
- [140] Shen, H.S., Xiang, Y. (2021). Effect of negative Poisson's ratio on the postbuckling behavior of axially compressed FG-GRMMC laminated cylindrical shells surrounded by an elastic medium. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 88, 104231.
- [141] Shen, H.S., Xiang, Y. (2021). Effect of negative Poisson's ratio on the postbuckling behavior of pressure-loaded FG-GRMMC laminated cylindrical shells. *Engineering Structures* 243, 112458.
- [142] Sobhani, E., Safaei, B. (2023). Vibrational characteristics of attached hemispherical-cylindrical ocean shell-structure reinforced by CNT nanocomposite with graded pores on two-parameter elastic foundations applicable in offshore components, *Ocean Engineering* 285 (2), 115413.

- [143] Sofiyev, A.H. (2014). The vibration and buckling of sandwich cylindrical shells covered by different coatings subjected to the hydrostatic pressure. *Composite Structures* 117, 124-134.
- [144] Sofiyev, A.H., Hui, D., Huseynov, S.E., Salamci, M.U., Yuan, G.Q. (2015). Stability and vibration of sandwich cylindrical shells containing a functionally graded material core with transverse shear stresses and rotary inertia effects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 230, 2376-2389.
- [145] Sofiyev, A.H., Kuruoglu, N. (2015). Dynamic instability of three-layered cylindrical shells containing an FGM interlayer. *Thin-Walled Structure* 93, 10-21.
- [146] Sofiyev, A.H., Esencan Turkaslan, B., Bayramov, R.P., Salamci, M.U. (2019). Analytical solution of stability of FG-CNTRC conical shells under external pressures. *Thin-Walled Structures* 144, 106338.
- [147] Song, J.P., She, G.L., Eltaher, M.A. (2024). Nonlinear aero-thermo-elastic flutter analysis of stiffened graphene platelets reinforced metal foams plates with initial geometric imperfection, *Aerospace Science and Technology* 147, 109050.
- [148] Song, Z., Xu, T., Gordin, M.L., Jiang, Y.B., Bae, I.T., Xiao, Q., Zhan, H., Liu, J., Wang, D. (2012). Polymer – Graphene nanocomposites as ultrafast-charge and discharge cathodes for rechargeable Lithium batteries. *Nano Letters* 12, 22205–22211.
- [149] Stankovich, S., Dikin, D.A., Dommett, G.H.B., Kohlhaas, K.M., Zimney, E.J., Stach, E.A., Piner, R.D., Nguyen, S.B.T., Ruoff R.S. (2006). Graphene-based composite materials. *Nature* 442, 282-286.
- [150] Tien, N.V., Phuong, N.T., Duc, V.M., Minh, T.Q., Dong, D.T., Quan, P.H., Nam, V.H., Ly, L.N. (2022). Nonlinear Thermo-Mechanical Buckling of Torsion-Loaded Cylindrical Shells with Eccentric Stiffeners Made from CNT-Reinforced Composite. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering* 46, 1107–1119.
- [151] Trang, L.T.N., Tung, H.V. (2018). Tangential Edge Constraint Sensitivity of

- Nonlinear Stability of CNT-Reinforced Composite Plates under Compressive and Thermomechanical Loadings. *Journal of Engineering Mechanics* 144(7), 04018056.
- [152] Trang, L.T.N., Tung, H.V. (2018). Thermomechanical nonlinear analysis of axially compressed carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations with tangentially restrained edges. *Journal of Thermal Stresses* 41(4), 418-438.
- [153] Trang, L.T.N., Tung, H.V. (2019). Thermomechanical nonlinear stability of pressure-loaded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly curved panels with tangentially restrained edges. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 233, 5848-5859.
- [154] Trang, L.T.N., Tung, H.V. (2020). Thermal postbuckling of shear deformable CNT-reinforced composite plates with tangentially restrained edges and temperature-dependent properties. *Journal of Thermoplastic Composite Materials* 33(1), 97-124.
- [155] Tu, B.T., Duc, V.M., Nam, P.N., Doan, C.V., Nam, V.H. (2024). Nonlinear thermo-mechanical dynamic buckling and vibration of FG-GPLRC circular plates and shallow spherical shells resting on the nonlinear viscoelastic foundation. *Archive of Applied Mechanics* 94, 3715–3729.
- [156] Tu, B.T., Phuong, N.T., Ly, L.N., Hung, V.T., Nam, V.H. (2024). A New Analytical Approach to the Nonlinear Thermo-Mechanical Buckling Behavior of Three-Dimensional Graphene Foams-Reinforced Complexly Curved Caps and Circular Plates. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. <https://doi.org/10.1142/S021945542550169X>
- [157] Tung, H.V. (2016). Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon-nanotube reinforced composite plates resting on elastic foundations with tangential-edge restraints. *Journal of Thermal Stresses* 40(5), 641-663.
- [158] Wang, Y., Feng, C., Zhao, Z., Yang, J. (2018). Eigenvalue buckling of functionally graded cylindrical shells reinforced with graphene platelets

- (GPL). *Composite Structures* 202(15), 38-46.
- [159] Wang, Y., Feng, C., Zhao, Z., Lu, F., Yang, J. (2018). Torsional buckling of graphene platelets (GPLs) reinforced functionally graded cylindrical shell with cutout. *Composite Structures* 197(1), 72-79.
- [160] Wang, Y., Zeng, R., Safarpour, M. (2022). Vibration analysis of FG-GPLRC annular plate in a thermal environment. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 50, 352–370.
- [161] Wang, Z.X., Shen, H.S. (2011). Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. *Computational Materials Science* 50(8), 2319–2330.
- [162] Wang, Z.X., Shen, H.S., (2012). Nonlinear dynamic response of nanotube-reinforced composite plates resting on elastic foundations in thermal environments. *Nonlinear Dynamics* 70, 735–754.
- [163] World architecture Community. Zaha Hadid Architects' Al Janoub Stadium opens for World Cup in Qatar. Truy cập ngày 20/12/2024 từ <https://worldarchitecture.org/architecture-news/ecpmh/zaha-hadid-architects-al-janoub-stadium-opens-for-world-cup-in-qatar.html>
- [164] Yadav, A. (2025). Vibration behavior of sandwich circular cylindrical shells with auxetic lattice core and CNT-reinforced facesheets. *Thin-Walled Structures* 207, 112716.
- [165] Yang, S., Wang, Z., Hao, Y., Zhang, W., Niu, Y., Ma, W. (2024). Nonlinear dynamic characteristics of smart FG-GPLRC sandwich varying thickness truncated conical shell with internal resonance for first three order modes. *Aerospace Science and Technology* 155, Part 2, 109672.
- [166] Yang, X., Chen, Z., Yang, J., Liu, H. (2024). Static and dynamic response of pyramidal lattice sandwich plate with composite face sheets reinforced by graphene platelets. *Engineering Structures* 310, 118122,
- [167] Yang, Y., Li, J., Chen, B., Dong, Y., Li, Y. (2023). Symmetric and asymmetric vibrations of rotating GPLRC annular plate. *International Journal of Mechanical Sciences* 250, 108282,
- [168] Yasin, H., Parviz, M., Fatemeh, G. (2019). Thermoelastic analysis of FG-

- GPLRC spherical shells under thermo-mechanical loadings based on Lord-Shulman theory. *Composites Part B: Engineering* 164, 400-424.
- [169] Yu, M.F., Lourie, O., Moloni, K., Kelly, T.F., Ruoff, R.S. (2000). Strength and breaking mechanism of multiwalled carbon nanotubes under tensile load. *Science* 287, 637-640.
- [170] Zeighami, V., Jafari, M. (2022). Thermal stress analysis of perforated unsymmetric FG-CNTRC plate using a general analytical solution. *Thin-Walled Structures* 173, 108956.
- [171] Zhao, L.C., Xu, L., Zeng, H.T. (2024). Thermal buckling of temperature-dependent FG-CNT reinforced composite conical-conical joined shell using GDQ. *Thin-Walled Structures* 205, Part A, 112320.

PHỤ LỤC

Các hệ số trong phương trình (2.31) và (2.32)

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \frac{-1}{2\pi a_{ou}^4} \left[(a_{ou} - 2r)^2 J_{11}^{ou} + 2(r - a_{ou})(a_{ou} - 2r) J_{12}^{ou} + (r - a_{ou})^2 J_{22}^{ou} \right] r dr \\
 &+ \int_0^{a_{in}} \frac{-1}{2\pi a_{ou}^4} \left[(a_{ou} - 2r)^2 J_{11}^{in} + 2(r - a_{ou})(a_{ou} - 2r) J_{12}^{in} + (r - a_{ou})^2 J_{22}^{in} \right] r dr \\
 &+ \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \frac{-1}{2\pi a_{ou}^4} \left[(a_{ou} - 2r)^2 J_{11}^{mi} + 2(r - a_{ou})(a_{ou} - 2r) J_{12}^{mi} + (r - a_{ou})^2 J_{22}^{mi} \right] r dr, \\
 I_{12} &= \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \frac{8\pi r}{a_{ou}^6} \left[\frac{-J_{12}^{ou}(3r - 2a_{ou})(a_{ou}^2 - r^2)^2 + J_{11}^{ou}(-2r + a_{ou})(a_{ou}^2 - r^2)^2}{4R_c} \right. \\
 &\quad \left. -(-r + a_{ou})(a_{ou}^2 - 3r^2)F_{12}^{ou} - \frac{J_{22}^{ou}(r + a_{ou})^2(r - a_{ou})^3}{4R_c} \right. \\
 &\quad \left. - (a_{ou}^2 - 3r^2)(a_{ou} - 2r)F_{11}^{ou} - (r - a_{ou})^2(r + a_{ou})F_{22}^{ou} \right. \\
 &\quad \left. - (a_{ou}^2 - r^2)(-2r + a_{ou})F_{12}^{ou} \right] dr \\
 &+ \int_0^{a_{in}} \frac{8\pi r}{a_{ou}^6} \left[\frac{-J_{22}^{in}(r - a_{ou})^3(r + a_{ou})^2}{4R_c} - (-r + a_{ou})(a_{ou}^2 - 3r^2)F_{12}^{in} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{-J_{12}^{in}(3r - 2a_{ou})(a_{ou}^2 - r^2)^2 + J_{11}^{in}(-2r + a_{ou})(a_{ou}^2 - r^2)^2}{4R_c} \right. \\
 &\quad \left. - (a_{ou}^2 - 3r^2)(-2r + a_{ou})F_{11}^{in} - (a_{ou}^2 - r^2)(-2r + a_{ou})F_{12}^{in} - (r - a_{ou})^2(r + a_{ou})F_{22}^{in} \right] dr \\
 &+ \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \frac{8\pi r}{a_{ou}^6} \left[\frac{+J_{11}^{mi}(a_{ou} - 2r)(a_{ou}^2 - r^2)^2 - J_{12}^{mi}(3r - 2a_{ou})(a_{ou}^2 - r^2)^2}{4R_c} \right. \\
 &\quad \left. - (a_{ou}^2 - 3r^2)(-2r + a_{ou})F_{11}^{mi} - (-r + a_{ou})(a_{ou}^2 - 3r^2)F_{12}^{mi} \right. \\
 &\quad \left. - (r - a_{ou})^2(r + a_{ou})F_{22}^{mi} - (a_{ou}^2 - r^2)(a_{ou} - 2r)F_{12}^{mi} - \frac{J_{22}^{mi}(r - a_{ou})^3(r + a_{ou})^2}{4R_c} \right] dr, \\
 I_{13} &= \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \frac{r^3 16\pi}{a_{ou}^{10}} \left[(r + a_{ou})^2(r - a_{ou})^3 J_{12}^{mi} + (r^2 - a_{ou}^2)^2(2r - a_{ou})J_{11}^{mi} \right] dr \\
 &+ \int_0^{a_{in}} \frac{r^3 16\pi}{a_{ou}^{10}} \left[(r + a_{ou})^2(r - a_{ou})^3 J_{12}^{in} + (r^2 - a_{ou}^2)^2(2r - a_{ou})J_{11}^{in} \right] dr \\
 &+ \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \frac{r^3 16\pi}{a_{ou}^{10}} \left[(r + a_{ou})^2(r - a_{ou})^3 J_{12}^{mi} + (r^2 - a_{ou}^2)^2(2r - a_{ou})J_{11}^{mi} \right] dr,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{14} &= \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} -\frac{2\pi r}{a_{ou}^2} \left[r \left(\phi_{1\theta}^{Tou} + 2\phi_{1r}^{Tou} \right) + a_{ou} \left(\phi_{1\theta}^{Tou} + \phi_{1r}^{Tou} \right) \right] dr \\
&+ \int_0^{a_{in}} -\frac{2\pi r}{a_{ou}^2} \left[r \left(\phi_{1\theta}^{Tin} + 2\phi_{1r}^{Tin} \right) + a_{ou} \left(\phi_{1\theta}^{Tin} + \phi_{1r}^{Tin} \right) \right] dr \\
&+ \int_{a_{in}}^{a_{mi}} -\frac{2\pi r}{a_{ou}^2} \left[r \left(\phi_{1\theta}^{Tmi} + 2\phi_{1r}^{Tmi} \right) + a_{ou} \left(\phi_{1\theta}^{Tmi} + \phi_{1r}^{Tmi} \right) \right] dr, \\
I_{15} &= + \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} -\frac{2\pi r}{a_{ou}^2} \left[a_{ou} \left(\phi_{1\theta}^{vou} + \phi_{1r}^{vou} \right) + r \left(\phi_{1\theta}^{vou} + 2\phi_{1r}^{vou} \right) \right] dr \\
&\int_0^{a_{in}} -\frac{2\pi r}{a_{ou}^2} \left[a_{ou} \left(\phi_{1\theta}^{vin} + \phi_{1r}^{vin} \right) + r \left(\phi_{1\theta}^{vin} + 2\phi_{1r}^{vin} \right) \right] dr \\
&+ \int_{a_{in}}^{a_{mi}} -\frac{2\pi r}{a_{ou}^2} \left[a_{ou} \left(\phi_{1\theta}^{vmi} + \phi_{1r}^{vmi} \right) + r \left(\phi_{1\theta}^{vmi} + 2\phi_{1r}^{vmi} \right) \right] dr, \\
I_{22} &= \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \frac{32\pi r^3}{a_{ou}^{10}} \left[-(-2r + a_{ou}) (a_{ou}^2 - r^2)^2 J_{11}^{ou} + (r - a_{ou})^3 (r + a_{ou})^2 J_{12}^{ou} \right] dr \\
&+ \int_0^{a_{in}} \frac{32\pi r^3}{a_{ou}^{10}} \left[-(-2r + a_{ou}) (a_{ou}^2 - r^2)^2 J_{11}^{in} + (r - a_{ou})^3 (r + a_{ou})^2 J_{12}^{in} \right] dr \\
&+ \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \frac{32\pi r^3}{a_{ou}^{10}} \left[-(-2r + a_{ou}) (a_{ou}^2 - r^2)^2 J_{11}^{mi} + (r - a_{ou})^3 (r + a_{ou})^2 J_{12}^{mi} \right] dr, \\
I_{23} &= \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \frac{192\pi r^3}{a_{ou}^{12}} \left[\left(r^2 - a_{ou}^2 \right)^3 F_{12}^{ou} - \left(a_{ou}^2 - r^2 \right)^2 \left(a_{ou}^2 - 3r^2 \right) F_{11}^{ou} + \frac{\left(r^2 - a_{ou}^2 \right)^4 \left(J_{11}^{ou} + J_{12}^{ou} \right)}{4R_c} \right] dr \\
&+ \int_0^{a_{in}} \frac{192\pi r^3}{a_{ou}^{12}} \left[\left(r^2 - a_{ou}^2 \right)^3 F_{12}^{in} - \left(a_{ou}^2 - r^2 \right)^2 \left(a_{ou}^2 - 3r^2 \right) F_{11}^{in} + \frac{\left(r^2 - a_{ou}^2 \right)^4 \left(J_{11}^{in} + J_{12}^{in} \right)}{4R_c} \right] dr \\
&+ \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \frac{192\pi r^3}{a_{ou}^{12}} \left[\left(r^2 - a_{ou}^2 \right)^3 F_{12}^{mi} - \left(a_{ou}^2 - r^2 \right)^2 \left(a_{ou}^2 - 3r^2 \right) F_{11}^{mi} + \frac{\left(r^2 - a_{ou}^2 \right)^4 \left(J_{11}^{mi} + J_{12}^{mi} \right)}{4R_c} \right] dr, \\
I_{24} &= - \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \frac{r^5 256\pi}{a_{ou}^{16}} \left[J_{11}^{ou} \left(a_{ou}^2 - r^2 \right)^4 \right] dr - \int_0^{a_{in}} \frac{r^5 256\pi}{a_{ou}^{16}} \left[J_{11}^{in} \left(a_{ou}^2 - r^2 \right)^4 \right] dr \\
&- \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \frac{r^5 256\pi}{a_{ou}^{16}} \left[J_{11}^{mi} \left(a_{ou}^2 - r^2 \right)^4 \right] dr,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{25} &= - \int_0^{a_{ou}} \frac{2r\pi}{a_{ou}^{16}} \left[(a_{ou}^2 - r^2)^8 \right] dr, \quad I_{26} = - \int_0^{a_{ou}} \frac{2r\pi}{a_{ou}^8} \left[(a_{ou}^2 - r^2)^4 \right] dr, \\
I_{27} &= - \int_0^{a_{ou}} \frac{16r\pi}{a_{ou}^8} \left[(a_{ou}^2 - 2r^2)(a_{ou}^2 - r^2)^2 \right] dr, \\
I_{28} &= \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \frac{32r\pi}{a_{ou}^8} \left[- \frac{(a_{ou}^2 - r^2)^4 \pi (J_{11}^{ou} + 2J_{12}^{ou} + J_{22}^{ou})}{16R_c^2} - \frac{(3r^2 - a_{ou}^2)(r^2 - a_{ou}^2)^2 (F_{12}^{ou} + F_{11}^{ou})}{2R_c} \right. \\
&\quad \left. - 2(3r^4 - 4a_{ou}^2 r^2 + a_{ou}^4) P_{12}^{ou} - (a_{ou}^2 - r^2)^2 P_{22}^{ou} - (a_{ou}^2 - 3r^2)^2 P_{11}^{ou} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(r^2 - a_{ou}^2)^3 (F_{12}^{ou} + F_{22}^{ou})}{2R_c} \right] dr \\
&+ \int_0^{a_{in}} \frac{32r\pi}{a_{ou}^8} \left[- \frac{(r^2 - a_{ou}^2)^4 (2J_{12}^{in} + J_{11}^{in} + J_{22}^{in}) \pi}{16R_c^2} + \frac{(a_{ou}^2 - 3r^2) a_{ou}^2 - r^{22} (F_{12}^{in} + F_{11}^{in})}{2R_c} \right. \\
&\quad \left. - P_{11}^{in} (a_{ou}^2 - r^2)^2 - 2(r^4 - 3a_{ou}^2 r^2 + a_{ou}^4) P_{12}^{in} - P_{22}^{in} (r^2 - a_{ou}^2)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(a_{ou}^2 - r^2)^3 (F_{22}^{in} + F_{12}^{in})}{2R_c} \right] dr \\
&+ \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \frac{32r\pi}{a_{ou}^8} \left[- \frac{(3r^2 - a_{ou}^2)(a_{ou}^2 - r^2)^2 (F_{11}^{mi} + F_{12}^{mi})}{2R_c} - \frac{(a_{ou}^2 - r^2)^4 \pi (J_{11}^{mi} + 2J_{12}^{mi} + J_{22}^{mi})}{16R_c^2} \right. \\
&\quad \left. - 2(r^4 - 3r^2 a_{ou}^2 + a_{ou}^4) P_{12}^{mi} - (a_{ou}^2 - 3r^2)^2 P_{11}^{mi} - (a_{ou}^2 - r^2)^2 P_{22}^{mi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(r^2 - a_{ou}^2)^3 (F_{12}^{mi} + F_{22}^{mi})}{2R_c} \right] dr, \\
I_{29} &= \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \frac{32r^3\pi}{a_{ou}^8} \left[(a_{ou}^2 - r^2)^2 \phi_{1r}^{Tou} \right] dr + \int_0^{a_{in}} \frac{32r^3\pi}{a_{ou}^8} \left[(a_{ou}^2 - r^2)^2 \phi_{1r}^{Tin} \right] dr + \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \frac{32r^3\pi}{a_{ou}^8} \left[(a_{ou}^2 - r^2)^2 \phi_{1r}^{Tmi} \right] dr, \\
I_{30} &= + \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \frac{8r\pi}{a_{ou}^4} \left[(a_{ou}^2 - r^2) \phi_{2\theta}^{Tou} + (a_{ou}^2 - 3r^2) \phi_{2r}^{Tou} - \frac{(a_{ou}^2 - r^2)^2 (\phi_{1\theta}^{Tou} + \phi_{1r}^{Tou})}{4R_c} \right] dr \\
&+ \int_0^{a_{in}} \frac{8r\pi}{a_{ou}^4} \left[(a_{ou}^2 - r^2) \phi_{2\theta}^{Tin} + (a_{ou}^2 - 3r^2) \phi_{2r}^{Tin} - \frac{(a_{ou}^2 - r^2)^2 (\phi_{1\theta}^{Tin} + \phi_{1r}^{Tin})}{4R_c} \right] dr \\
&+ \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \frac{8r\pi}{a_{ou}^4} \left[(a_{ou}^2 - r^2) \phi_{2\theta}^{Tmi} + (a_{ou}^2 - 3r^2) \phi_{2r}^{Tmi} - \frac{(a_{ou}^2 - r^2)^2 (\phi_{1\theta}^{Tmi} + \phi_{1r}^{Tmi})}{4R_c} \right] dr,
\end{aligned}$$

$$I_{31} = \int_0^{a_{ou}} (r^2 - a_{ou}^2)^2 \frac{2r\pi}{a_{ou}^4} dr, \quad I_{33} = \int_0^{a_{ou}} (r^2 - a_{ou}^2)^4 \frac{2r\pi}{a_{ou}^8} dr,$$

$$I_{32} = \int_0^{a_{in}} (r^2 - a_{ou}^2)^4 \chi_1^{in} \frac{r2\pi}{a_{ou}^8} dr + \int_{a_{in}}^{a_{mi}} (r^2 - a_{ou}^2)^4 \chi_1^{mi} \frac{r2\pi}{a_{ou}^8} dr + \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} (r^2 - a_{ou}^2)^4 \chi_1^{ou} \frac{r2\pi}{a_{ou}^8} dr,$$

$$I_{34} = \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} (a_{ou}^2 - r^2)^2 \phi_{1r}^{vou} \frac{r^3 \pi 32}{a_{ou}^8} dr + \int_0^{a_{in}} (a_{ou}^2 - r^2)^2 \phi_{1r}^{vin} \frac{r^3 \pi 32}{a_{ou}^8} dr + \int_{a_{in}}^{a_{mi}} (a_{ou}^2 - r^2)^2 \phi_{1r}^{vmi} \frac{r^3 \pi 32}{a_{ou}^8} dr,$$

$$I_{35} = \int_{a_{mi}}^{a_{ou}} \left[(a_{ou}^2 - 3r^2) \phi_{2r}^{vou} - \frac{(a_{ou}^2 - r^2)^2 (\phi_{1\theta}^{vou} + \phi_{1r}^{vou})}{4R_c} + (a_{ou}^2 - r^2) \phi_{2\theta}^{vou} \right] \frac{r8\pi}{a_{ou}^4} dr$$

$$+ \int_0^{a_{in}} \left[(a_{ou}^2 - 3r^2) \phi_{2r}^{vin} - \frac{(a_{ou}^2 - r^2)^2 (\phi_{1\theta}^{vin} + \phi_{1r}^{vin})}{4R_c} + (a_{ou}^2 - r^2) \phi_{2\theta}^{vin} \right] \frac{r8\pi}{a_{ou}^4} dr$$

$$+ \int_{a_{in}}^{a_{mi}} \left[(a_{ou}^2 - 3r^2) \phi_{2r}^{vmi} - \frac{(a_{ou}^2 - r^2)^2 (\phi_{1\theta}^{vmi} + \phi_{1r}^{vmi})}{4R_c} + (a_{ou}^2 - r^2) \phi_{2\theta}^{vmi} \right] \frac{r8\pi}{a_{ou}^4} dr,$$

$$\chi_1^{ou} = \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} \bar{\rho}_{st} \frac{b_{2p}}{d_{2p}} dz + 2 \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} \bar{\rho}_{st} \frac{b_{1m}}{d_{1m}} dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} \bar{\rho}_{sh} dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} \bar{\rho}_v dz$$

$$\chi_1^{in} = \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} \bar{\rho}_{st} dz + \int_{-h/2+h_v}^{h/2} \bar{\rho}_{sh} dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} \bar{\rho}_v dz,$$

$$\chi_1^{mi} = \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} \frac{b_{2p}}{d_{2p}} \bar{\rho}_{st} dz + \int_{h/2}^{h_{st}+h/2} \frac{b_{1m}}{d_{1m}} \bar{\rho}_{st} dz + \int_{h_v-h/2}^{h/2} \bar{\rho}_{sh} dz + \int_{-h/2}^{h_v-h/2} \bar{\rho}_v dz,$$