BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BỘ XÂY DỰNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ GIAO THÔNG VẬN TẢI

BÙI TIẾN TÚ

PHÂN TÍCH ỐN ĐỊNH CƠ NHIỆT CỦA TẤM TRÒN VÀ VỎ CHỎM THOẢI FGM VÀ FG-GPLRC TRONG KẾT CÂU CÔNG TRÌNH CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT

HÀ NỘI - 2025

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BỘ XÂY DỰNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ GIAO THÔNG VẬN TẢI

BÙI TIẾN TÚ

PHÂN TÍCH ÔN ĐỊNH CƠ NHIỆT CỦA TẤM TRÒN VÀ VỎ CHỎM THOẢI FGM VÀ FG-GPLRC TRONG KẾT CÂU CÔNG TRÌNH CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG

NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH ĐẶC BIỆT MÃ SỐ: 9580206

> NGƯỜI HƯỚNG DÃN KHOA HỌC: 1. PGS. TS Nguyễn Thị Phương 2. TS. Lê Ngọc Lý

HÀ NỘI - 2025

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi.

Các số liệu, kết quả nêu trong luận án là trung thực, đáng tin cậy và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả

Bùi Tiến Tú

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới cô hướng dẫn chính là PGS.TS Nguyễn Thị Phương và thầy hướng dẫn phụ là TS. Lê Ngọc Lý đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ, tạo mọi điều kiện thuận lợi và thường xuyên động viên để tác giả hoàn thành luận án này.

Tác giả xin cảm ơn tập thể các thành viên của nhóm nghiên cứu Cơ học Vật liệu và Kết cấu tiên tiến - trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải đã giúp đỡ, động viên và hỗ trợ mọi điều kiện cần thiết trong quá trình nghiên cứu của tác giả.

Tác giả trân trọng cảm ơn tập thể các thầy cô Viện Công nghệ Giao thông vận tải, phòng Sau Đại học, trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải đã luôn quan tâm, giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong suốt thời gian tác giả học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, các bạn bè thân thiết và đồng nghiệp của tác giả, những người đã luôn ở bên cạnh động viên và giúp đỡ tác giả hoàn thành luận án này.

MỤC LỤC xii
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT xv
DANH MỤC CÁC BẢNG xvi
DANH MỤC CÁC HÌNH VĨ, ĐỒ THỊxviii
MỞ ĐẦU1
Chương 1. TỔNG QUAN VÂN ĐỀ NGHIÊN CỨU7
1.1. Giới thiệu kết cấu chỏm thoải và tấm tròn, vật liệu FGM và FG-GPLRC 7
1.1.1. Giới thiệu kết cấu công trình chỏm thoải và tấm tròn
1.1.2. Giới thiệu vật liệu FGM và FG-GPLRC10
1.1.3. Tiềm năng ứng dụng của kết cấu công trình chỏm thoải và tấm tròn bằng FGM
và FG-GPLRC11
1.2. Tình hình nghiên cứu trong nước và quốc tế về ứng xử cơ nhiệt của kết cấu
tấm vỏ bằng FGM và FG-GPLRC13
1.2.1. Kết cấu tấm, panel trụ, vỏ thoải hai độ cong FGM và FG-GPLRC13
1.2.2. Kết cấu vỏ trụ, vỏ trống FGM và FG-GPLRC14
1.2.3. Kết cấu vỏ chỏm thoải và tấm tròn FGM16
1.2.4. Kết cấu vỏ chỏm thoải và tấm tròn FG-GPLRC18
1.3. Tính chất hiệu dụng của các loại FGM và FG-GPLRC được nghiên cứu trong
luận án 19
1.3.1. FGM rỗng 19
1.3.2. Sandwich FGM lõi rõng21
1.3.3. FG-GPLRC
1.3.4. FG-GPLRC rỗng24
1.3.5. Sandwich FG-GPLRC lõi rỗng26
1.4. Những kết quả đã đạt được trong nước và quốc tế và những vấn đề cần tiếp tục
nghiên cứu
1.4.1. Những kết quả đã đạt được trong nước và quốc tế
1.4.2. Xác định mục tiêu cần tiếp tục nghiên cứu
Chương 2. ÔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA KẾT CÂU CHỎM THOẢI CÓ ĐỘ CONG
PHỨC TẠP VÀ TẤM TRÒN BẰNG FG-GPLRC RỖNG VÀ SANDWICH FG-

MỤC LỤC

GPLRC LÕI RÕNG THEO FSDT VÀ PHƯƠNG PHÁP GALERKIN – TIẾP CẬN
THEO CHUYÊN VI
2.1. Thiết lập các phương trình chủ đạo theo FSDT cho kết cấu chỏm thoải có độ
cong phức tạp và tấm tròn32
2.1.1. Mô hình kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn
2.1.2. Thiết lập các phương trình chủ đạo theo FSDT
2.2. Dạng nghiệm lượng giác và phương pháp Galerkin
2.3. Nghiên cứu so sánh 43
2.4. Khảo sát số phân tích ổn định phi tuyến kết cấu chỏm thoải có độ cong phức
tạp và tấm tròn bằng FG-GPLRC rỗng và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng 45
2.4.1. Kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn FG-GPLRC rỗng 45
2.4.2. Kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi
rỗng 52
2.5. Kết luận chương 2 60
Chương 3. ÔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA KẾT CÂU CHỎM CẦU THOẢI VÀ TÂM
TRÒN BẰNG FGM RỖNG, SANDWICH FGM LÕI RỖNG, FG-GPLRC VÀ
SANDWICH FG-GPLRC LÕI RÕNG THEO R3SDT VÀ PHƯƠNG PHÁP RITZ –
TIẾP CẬN THEO CHUYỀN VỊ61
3.1. Các phương trình chủ đạo theo R3SDT và phương trình năng lượng của kết
cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn62
3.1.1. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn62
3.1.2. Thiết lập các phương trình chủ đạo theo R3SDT63
3.1.3. Thiết lập các phương trình năng lượng65
3.2. Điều kiện biên, dạng nghiệm và phương pháp năng lượng Ritz 65
3.3. Nghiên cứu so sánh 69
3.4. Khảo sát số phân tích ổn định phi tuyến kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn
bằng FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC và sandwich FG-GPLRC
lõi rỗng 71
3.4.1. Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FGM rỗng71
3.4.2. Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng
3.4.3. Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC

3.4.4. Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng91
3.5. Kết luận chương 3
Chương 4. ÔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA KẾT CÂU CHỎM CÀU THOẢI VÀ TÂM
TRÒN FG-GPLRC RÕNG THEO FSDT VÀ PHƯƠNG PHÁP RITZ – TIẾP CẬN
HÀM ỨNG SUẤT 101
4.1. Mô hình và các phương trình chủ đạo theo FSDT của kết cấu chỏm cầu thoải
và tấm tròn FG-GPLRC rỗng101
4.2. Điều kiện biên và xác định hàm ứng suất105
4.3. Phương pháp năng lượng Ritz108
4.4. Ứng dụng kết quả tính toán lý thuyết phân tích ổn định phi tuyến kết cấu chỏm
cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC rỗng110
4.4.1. Nghiên cứu so sánh110
4.4.2. Phân tích tải nhiệt tới hạn của tấm tròn FG-GPLRC rỗng 111
4.4.3. Ứng sử sau mất ổn định của chỏm cầu thoải FG-GPLRC rỗng 111
4.5. Kết luận chương 4 115
KÊT LUẬN 116
KIẾN NGHỊ VỀ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO118
DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN
LUẬN ÁN 119
TÀI LIỆU THAM KHẢO121
PHŲ LŲC

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

FGM	Functionally Graded Material - Vật liệu cơ tính biến thiên.								
GPL	Graphene platelets - "månh" graphene.								
FG-GPLRC	Functionally graded graphene platelets reinforced composite -								
	Composite cơ tính biến thiên gia cường "mảnh" graphene.								
GF3D	FG-GPLRC rong.								
E	Mô đun Young.								
q	Áp lực ngoài phân bố đều trên bề mặt vỏ (tấm).								
ΔT	Tải nhiệt phân bố đều theo chiều dày vỏ (tấm).								
ν	Hệ số Poisson.								
α	Hệ số dãn nở nhiệt.								
u,v,w	Các thành phần chuyển vị của vỏ (tấm).								
3	Biến dạng của vỏ (tấm).								
σ	Úng suất của vỏ (tấm).								
K_1, K_2, K_3	Các thành phần độ cứng của nền đàn hồi phi tuyến.								
e	Độ rỗng của FGM rỗng.								
e_{O}, e_{X}, e_{U}	Các độ rỗng của FG-GPLRC rỗng.								
e_0	Độ rỗng của lớp lõi rỗng trong cấu trúc sandwich.								
$V_p(z)$	Tỷ phần thể tích rỗng theo bề dày của lớp lõi rỗng trong cấu trúc sandwich.								
$W_{_{GPL}}(z)$	Tỷ phần khối lượng GPL theo bề dày vỏ (tấm).								
W^{*}_{GPL}	Tổng tỷ phần phần khối lượng GPL trong vỏ (tấm).								
Snap-through	Hiện tượng mất ổn định đột ngột hoặc chuyển trạng thái đột ngột.								
FSDT Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (First-order shear defe									
	theory).								
R3SDT	Lý thuyết biến dạng trượt bậc ba của Reddy.								
HSDT	Lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (Higher-order shear deformation								
	theory).								
GDQM	Phương pháp cầu phương vi phân tổng quát.								

DANH MỤC CÁC BẢNG

Bảng 1.1. Hệ số nhiệt độ cho các tính chất của vật liệu thành phần [70] 20
Bảng 1.2. Thông số vật liệu của GPL và nền kim loại Đồng [132]24
Bảng 1.3. Tương quan giữa các loại độ rỗng khác nhau
Bảng 2.1. So sánh tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn FGM Al/Al ₂ O ₃ 44
Bảng 2.2. So sánh biên độ của độ võng $W(mm)$ của tấm tròn đẳng hướng chịu tải áp
lực ngoài phân bố đều44
Bảng 2.3. Ảnh hưởng của độ rỗng, loại phân bố rỗng, tỷ phần khối lượng GPL đến
tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(\mathbf{K})$ của tấm tròn FG-GPLRC rỗng hoàn hảo
(h = 0.01 m, a = 40h, q = 0 Mpa, m = 1)
Bảng 2.4. Ảnh hưởng của độ rỗng, loại phân bố GPL, tỷ phần khối lượng GPL đến
tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng ($h = 0.027$ m,
$a = 35h, W^* = 0, K_1 = 8MN/m^3, K_2 = 0.2MN/m, K_3 = 0, m = 1, q = 0MPa, R = \infty$)
53

- **Bảng 3.4.** Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích k của lớp mặt FGM, tỷ số a / h đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn sandwich FGM lõi rõng ($h = 1 \text{mm}, h_{fs} = 0.2h$,

Bảng 3.6. Ảnh hưởng của thông số hình học GPL đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tròn FG-GPLRC (h = 0.01m, a / h = 20, $W_{GPL}^* = 2\%$, $a_{GPL} = 2.5 \mu m$, $\xi = 0$, tâm Bảng 3.7. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến tải nhiệt tới hạn của tấm tròn $(h = 0.01m, a / h = 20, \xi = 0, K_1 = 10MN / m^3, K_2 = 0.5MN / m,$ **FG-GPLRC Bảng 3.8.** Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng (a / h = 20, h = 0.03m, $h_{pc} = h_{fs} = h/3$, $e_0 = 0.3$, **Bảng 3.9.** Ảnh hưởng của độ rỗng lõi đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rõng $(a / h = 20, h = 0.03m, h_{pc} = h_{fs} = h/3, \xi = 0,$ Bảng 3.10. Ảnh hưởng của độ dày lõi đến tải nhiệt tới hạn của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rõng $(a / h = 20, h = 0.03m, h_{fs} = (h - h_{pc})/2, \xi = 0, W_{GPL}^* = 3\%,$ **Bảng 3.11.** Ảnh hưởng của hệ số nền đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(\mathbf{K})$ của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rõng $(h = 0.03m, h_{pc} = h_{fs} = h/3, \xi = 0, W_{GPL}^* = 3\%,$ Bảng 4.1. So sánh tải nhiệt tới hạn của tấm tròn hoàn hảo sandwich FG-GPLRC (UD-PC-UD) với kết quả của Vũ Hoài Nam và cộng sự [85] (h=0.027m, a=35h, a=35h)q = 0MPa, $R = \infty$, $K_1 = 8MN / m^3$, $K_2 = 0.2MN / m$, $K_3 = 0MN / m^5$, $W^* = 0$, Bảng 4.2. Ảnh hưởng của độ rỗng, loại phân bố rỗng, tỷ phần khối lượng GPL đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn hoàn hảo FG-GPLRC rỗng (h = 0.015m, a = 35h, q = 0MPa, $R = \infty, W^* = 0, K_1 = 0$ MN / $m^3, K_2 = 0$ MN / $m, K_3 = 0$ MN / m^5)

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ, ĐỒ THỊ

Hình 1.1. Hình dạng của kết cấu công trình chỏm thoải và tấm tròn7
Hình 1.2. Một số công trình sử dụng kết cấu chỏm thoải và tấm tròn
Hình 1.3. Cấu trúc nguyên tử của Graphene sheet [33] 11
Hình 1.4. Hình ảnh của GPL trên thị trường qua kính hiển vi điện tử quét (SEM), có
độ dày 10nm và đường kính trung bình 8μm [40]11
Hình 1.5. Hai quy luật phân bố rỗng của FGM rỗng 19
Hình 1.6. Cấu trúc sandwich FGM lõi rỗng21
Hình 1.7. Các loại phân bố tỷ phần khối lượng GPL của FG-GPLRC 22
Hình 1.8. Các loại phân bố tỷ phần thể tích rỗng của FG-GPLRC rỗng 24
Hình 1.9. Năm loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng27
Hình 2.1. Mô hình kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn
Hình 2.2. Hình dạng độ cong hình học của các chỏm thoải khác nhau
Hình 2.3. Mô hình kết cấu chỏm thoải và tấm tròn FG-GPLRC rỗng 45
Hình 2.4. Khảo sát các mode m mất ổn định cơ và nhiệt của tấm tròn GF3D-X 46
Hình 2.5. Khảo sát các mode m mất ổn định cơ và nhiệt của chỏm thoải có độ cong
$rb/ra \tan FG GDL BC r^{2} rac{1}{2}$
pliuc tập FO-OFLKC tông
Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ và $\Delta T \sim W / h$ của
Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ và $\Delta T \sim W / h$ của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng
Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ và $\Delta T \sim W / h$ của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng
Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ và $\Delta T \sim W / h$ của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng
 Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định q ~ W / h và ΔT ~ W / h của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng
 Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định q ~ W / h và ΔT ~ W / h của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng
 Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định <i>q</i> ~ <i>W</i> / <i>h</i> và Δ<i>T</i> ~ <i>W</i> / <i>h</i> của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rõng
 Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định <i>q</i> ~ <i>W</i> / <i>h</i> và Δ<i>T</i> ~ <i>W</i> / <i>h</i> của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng
 phúc tạp FG-GPLRC tông
 Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định <i>q</i> ~ <i>W</i> / <i>h</i> và Δ<i>T</i> ~ <i>W</i> / <i>h</i> của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng
hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ và $\Delta T \sim W / h$ của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng
Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ và $\Delta T \sim W / h$ của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng
hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ và $\Delta T \sim W / h$ của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng

Hình 2.13. Ảnh hưởng của độ nâng đỉnh đến ứng xử cơ sau mất ổn định của chỏm
sin GF3D-O và GF3D-X
Hình 2.14. Mô hình kết cấu chỏm thoải và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng
Hình 2.15. Khảo sát các mode m mất ổn định cơ và nhiệt của chỏm thoải có độ cong
phức tạp và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng 54
Hình 2.16. So sánh ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu, chỏm parabol,
chỏm sin và chỏm elip sandwich FG-GPLRC lõi rỗng 55
Hình 2.17. So sánh năm loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng về ứng xử cơ và
nhiệt sau mất ổn định của chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn 57
Hình 2.18. Ảnh hưởng của độ rỗng lõi đến ứng xử cơ của chỏm sin UD-PC-UD và
nhiệt của chỏm parabol V-PC-A sau mất ổn định 57
Hình 2.19. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến ứng xử cơ và nhiệt của chỏm
sin V-PC-A và X-PC-X sau mất ổn định58
Hình 2.20. Ảnh hưởng của độ nâng đỉnh đến ứng xử cơ của chỏm parabol UD-PC-
UD và nhiệt của chỏm sin V-PC-A sau mất ổn định58
Hình 2.21. Ảnh hưởng của hệ số nền K_1, K_2 đến ứng xử cơ của chỏm elip V-PC-A
và nhiệt của chỏm sin X-PC-X sau mất ổn định 59
Hình 2.22. Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến K_3 đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất
ổn định của chỏm parabol X-PC-X59
Hình 3.1. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn theo R3SDT
Hình 3.2. So sánh biên độ độ võng của tấm tròn FGM với kết quả của Reddy [99]70
Hình 3.3. So sánh đường cong sau mất ổn định chịu tải áp lực ngoài của chỏm cầu
thoải S-FGM với kết quả của Anh và Đức [17]70
Hình 3.4. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FGM rỗng
Hình 3.5. Ảnh hưởng chỉ số tỷ lệ thể tích k của FGM đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất
ổn định của tấm tròn và chỏm cầu thoải FGM rỗng74
Hình 3.6. Ảnh hưởng của độ rỗng đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của tấm
tròn FG-UD74
Hình 3.7. Ảnh hưởng của độ rỗng đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm
cầu thoải FG-O75

Hình 3.8. Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định
của chỏm cầu thoải FG-UD và FG-O75
Hình 3.9. Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định
của tấm tròn FG-UD và FG-O76
Hình 3.10. Ảnh hưởng của nhiệt môi trường đến ứng xử cơ sau mất ổn định của chỏm
cầu thoải và tấm tròn FG-O76
Hình 3.11. Ảnh hưởng của tỷ số a / h đến ứng xử cơ của chỏm cầu thoải và nhiệt
của tấm tròn FG-UD sau mất ổn định77
Hình 3.12. Ảnh hưởng của tỷ số a / R đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của
tấm tròn và chỏm cầu thoải FG-O77
Hình 3.13. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng 78
Hình 3.14. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích k của lớp mặt FGM đến ứng xử cơ và
nhiệt sau mất ổn định của tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FGM lõi rỗng 80
Hình 3.15. Ảnh hưởng của tỷ số a/h và a/R đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn
định của tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FGM lõi rỗng 82
Hình 3.16. Ảnh hưởng của tỷ số h_{fs}/h đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của
tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FGM lõi rỗng83
Hình 3.17. Ảnh hưởng của độ rỗng lớp lõi đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định
của tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FGM lõi rỗng 84
Hình 3.18. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC
Hình 3.19. Ảnh hưởng của quy luật phân bố GPL đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn
định của chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC87
Hình 3.20. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất
ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn X-GPLRC 88
Hình 3.21. Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn
định của chỏm cầu thoải O-GPLRC và tấm tròn V-GPLRC
Hình 3.22. Ảnh hưởng của tỷ số a/h và a/R đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn
định của chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC90
Hình 3.23. Mô hình chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng 91

Hình 3.24. Ảnh hưởng của quy luật phân bố GPL đến ứng xử cơ của chỏm cầu thoải
và nhiệt của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng sau mất ổn định 94
Hình 3.25. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất
ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn O-PC-O95
Hình 3.26. Ảnh hưởng độ dày lớp lõi đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của
chỏm cầu thoải và tấm tròn X-PC-X96
Hình 3.27. Ảnh hưởng của độ rỗng lõi đến ứng xử cơ của kết chỏm cầu thoải A-PC-
V và nhiệt của tấm tròn A-PC-V sau mất ổn định96
Hình 3.28. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của
chỏm cầu thoải và tấm tròn V-PC-A97
Hình 3.29. Ảnh hưởng của tỷ số a / R đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của
chỏm cầu thoải và tấm tròn UD-PC-UD98
Hình 3.30. Ảnh hưởng của hệ số nền đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của
chỏm cầu thoải và tấm tròn UD-PC-UD98
Hình 4.1. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC rỗng 102
Hình 4.2. Ảnh hưởng của loại phân bố thể tích rỗng đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất
ổn định của chỏm cầu thoải FG-GPLRC rỗng112
Hình 4.3. Ảnh hưởng của độ rỗng đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm
cầu thoải GF3D-O112
Hình 4.4. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn
định của kết cấu chỏm cầu thoải GF3D-O113
Hình 4.5. Ảnh hưởng của tỷ số a / h đến ứng xử cơ sau mất ổn định của chỏm cầu
thoåi GF3D-U 113
Hình 4.6. Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo ban đầu đến ứng xử cơ sau mất ổn định
của chỏm cầu thoải GF3D-O113
Hình 4.7. Ảnh hưởng của hệ số nền K_1, K_2 đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định
của chỏm cầu thoải GF3D-O114
Hình 4.8. Ảnh hưởng của hệ số nền K_3 đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của
chỏm cầu thoải GF3D-O114

MỞ ĐẦU

Kết cấu công trình dạng chỏm thoải và tấm tròn đã được phát triển và ứng dụng qua nhiều thế kỷ, đóng vai trò quan trọng trong nhiều công trình xây dựng trên khắp thể giới. Nhờ hình dạng cong mềm mại, kết cấu chỏm thoải có khả năng phân bố đều lực tác động, từ đó nâng cao khả năng chịu lực và độ bền của công trình. Ngoài những ưu điểm về mặt kỹ thuật, kiến trúc chỏm thoải còn có tính thẩm mỹ cao nhờ hình dáng mềm mại, đồng thời tạo ra không gian sử dụng lớn cho công trình. Nhờ đó chúng có khả năng ứng dụng rộng rãi cho các công trình dân dụng, công trình tôn giáo và văn hóa, công trình thương mại và du lịch, công trình công cộng, công trình công nghiệp, công trình lưu trữ và công trình quân sư... Kiến trúc và kết cấu các công trình xây dựng ngày càng trở nên phức tạp để đáp ứng được đa dang mục đích sử dụng của các dang công trình mới được xây dựng trong các điều kiên đặc biệt. Kết cấu chỏm thoải và tấm tròn còn phù hợp với các công trình xây dựng trong điều đặc biệt như: trong môi trường hóa chất, dưới nước, dưới đáy biển, sâu trong lòng đất hoặc trên hẻm núi cao... Kết cấu chỏm thoải và tấm tròn có được sự linh hoạt trong thiết kế kết cấu và khả năng sử dụng đa dạng vật liệu không chỉ mang lại giá trị thẩm mỹ mà còn đem lại nhiều lợi ích về mặt kỹ thuật và kinh tế. Nhờ đó, chúng tiếp tục khẳng định vị thế quan trọng trong ngành xây dựng hiện đại, đáp ứng được các yêu cầu ngày càng cao của các công trình đa chức năng và phức tạp.

Sự phát triển không ngừng của khoa học và công nghệ sản xuất đã tạo ra các vật liệu composite tiên tiến với các tính chất cơ học vượt trội. Điển hình trong số đó là vật liệu composite cơ tính biến thiên có tên quốc tế là Fuctionally Graded Material (viết tắt là FGM), và vật liệu nanocomposite gia cường các "mảnh" graphene (Graphene platelets, viết tắt là GPL) cơ tính biến thiên có tên quốc tế là Functionally graded graphene platelets reinforced composite (viết tắt là FG-GPLRC). Những vật liệu này được xem là giải pháp xây dựng ưu việt vì có độ bền cao, tuổi thọ dài đem đến nhiều cơ hội mới trong ngành xây dựng và kiến trúc. Trong tương lai, các kết cấu FGM và FG-GPLRC có thể kết hợp với kết cấu vật liệu xây dựng truyền thống để tạo ra các cấu trúc nhẹ hơn, vững chắc và ấn tượng hơn. Tuy nhiên, FGM và FG-GPLRC đều có tính chất vật liệu dị hướng và ứng xử cơ học phức tạp, đòi hỏi các mô hình tính toán tin cậy và các nghiên cứu lý thuyết chuyên sâu áp dụng riêng biệt cho từng

loại vật liệu trước khi đưa vào ứng dụng trong các công trình thực tế. Hiện nay, tại Việt Nam, các tiêu chuẩn thiết kế hiện hành mới đề cập cho bài toán thiết kế ổn định tổng thể tuyến tính kết cấu tấm vỏ bằng vật liệu đẳng hướng. Trong khi đó FGM và FG-GPLRC có đặc tính dị hướng phức tạp và khả năng chịu lực cao, chịu được độ võng rất lớn không phù hợp với các bài toán tuyến tính hình học mà đòi hỏi phải sử dụng các bài toán phi tuyến. Do đó, hiện vẫn còn thiếu các tiêu chuẩn về thiết kế ổn định phi tuyến của các kết cấu công trình thành mỏng làm từ vật liệu composite tiên tiến. Việc phát triển các tiêu chuẩn này là cần thiết để đảm bảo tính an toàn và hiệu quả khi ứng dụng FGM và FG-GPLRC trong các công trình thực tế.

Sư kết hợp của kết cấu công trình chỏm thoải và tấm tròn với các vật liêu tiên tiến FGM và FG-GPLRC tao ra cấu trúc vươt trôi, vừa có tính thẩm mỹ cao, vừa có đô bền và đô ổn đinh lớn, đồng thời chiu được các điều kiên làm việc khắc khe như môi trường nhiệt đô cao và môi trường hóa chất. Kết cấu công trình chỏm thoải và tấm tròn FGM và FG-GPLRC thuộc dang kết cấu thành mỏng, chiu được biến dang và độ võng lớn nên có khả năng làm việc an toàn ngay cả khi đã mất ổn định. Vì vậy, bài toán ổn định và sau mất ổn định phi tuyến trở thành hướng nghiên cứu quan trọng trong phân tích ứng xử kết của cấu này làm cơ sở để đánh giá khả năng chịu tải của kết cấu phục vụ trong công tác thiết kế, duy tu, bảo trì và bảo dưỡng công trình. Hiện nay, việc phân tích ổn định phi tuyến của các kết cấu chỏm thoải và tấm tròn FGM và FG-GPLRC sử dụng các lý thuyết biến dạng trượt còn gặp nhiều khó khăn do tính chất phức tạp về mặt toán học nên các công bố còn hạn chế và chưa đầy đủ. Đặc biệt, đối với các kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp như chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip, cho đến nay vẫn chưa có nghiên cứu nào được công bố. Điều này cho thấy sư cấp thiết phải tiếp tục phát triển các phương pháp phân tích tiên tiến và toàn diên hơn để khai thác tối đa tiềm năng ứng dung của kết cấu và vật liêu này trong thực tế.

Xuất phát từ những lý do trên đây, đề tài luận án này nghiên cứu *Phân tích ổn* định cơ nhiệt của tấm tròn và vỏ chỏm thoải FGM và FG-GPLRC trong kết cấu công trình có xét đến biến dạng trượt ngang.

Mục tiêu của luận án

Luận án đặt ra các mục tiêu chính sau đây:

Về mặt kết cấu: nghiên cứu tập trung đánh giá ảnh hưởng của thông số kích thước hình học, ảnh hưởng của nhiệt môi trường, ảnh hưởng của tương tác nền đến ứng xử cơ và nhiệt của các kết cấu công trình chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn từ việc giải quyết các bài toán sau:

- Phân tích ổn định cơ nhiệt phi tuyến bao gồm tính phi tuyến hình học theo nghĩa von Kármán của kết cấu chỏm thoải và tấm tròn với các dạng chỏm thoải khác nhau gồm chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip. Từ đó, có thêm được sự so sánh rõ ràng về khả năng chịu tải giữa các dạng chỏm thoải khác nhau. Cách tiếp cận theo chuyển vị, dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT) và phương pháp Galerkin. Sử dụng dạng nghiệm lượng giác cho phép xem xét đồng thời nhiều mode mất ổn định khác nhau, nâng cao độ tin cậy của phương pháp trong phân tích và dự đoán ứng xử của kết cấu trong các điều kiện tải trọng khác nhau.

- Phân tích ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu công trình chỏm cầu thoải và tấm tròn có xét tới phi tuyến hình học theo nghĩa von Kármán. Cách tiếp cận theo chuyển vị, theo lý thuyết biến dạng trượt bậc ba của Reddy (R3SDT). R3SDT thuộc loại lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (HSDT) được sử dụng phổ biến nhất trong đó các thành phần biến dạng trượt ngang được xét đến một cách đầy đủ mà không cần hệ số hiệu chỉnh trượt để nâng cao độ chính xác trong phân tích ứng xử cơ học. Sử dụng phương pháp năng lượng Ritz với dạng nghiệm đa thức cho phép giảm bớt độ phức tạp của bài toán mà vẫn đảm bảo tính chính xác của phương pháp.

- Phân tích ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn được thực hiện trên cơ sở FSDT, có xét đến phi tuyến hình học theo mô hình von Kármán. Tiếp cận theo hàm ứng suất giúp đa dạng hóa phương pháp nghiên cứu, đồng thời cung cấp góc nhìn khác về ứng xử cơ học của kết cấu. Phương pháp năng lượng Ritz kết hợp với dạng nghiệm đa thức được sử dụng để cân bằng giữa độ phức tạp về mặt toán học và độ chính xác của phương pháp.

Về mặt vật liệu: phân tích ảnh hưởng của tính chất vật liệu dị hướng, ảnh hưởng của quy luật phân bố thành phần vật liệu đến ứng xử cơ nhiệt của kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn. Các loại vật liệu tiên tiến FGM và FG-GPLRC có

thiết kế được lựa chọn nghiên cứu đáp ứng các yêu cầu kỹ thuật cấp thiết trong xây dựng công trình. Cụ thể:

 Vật liệu FG-GPLRC: có độ cứng cao, thuận lợi trong chế tạo, phù hợp với các kết cấu chịu tải lớn.

- Vật liệu FGM và FG-GPLRC rỗng: bên trong chứa các lỗ rỗng có tỷ phần thể tích phân bố theo quy luật xác định dọc theo chiều dày kết cấu, với mục đích làm giảm khối lượng và cải thiện khả năng cách nhiệt, cách âm.

 Vật liệu sandwich FGM và FG-GPLRC lõi rỗng: cấu trúc gồm lớp lõi là vật liệu rỗng kết hợp với hai lớp mặt FGM hoặc FG-GPLRC, vừa tăng độ cứng vừa đảm bảo hiệu quả cách nhiệt và cách âm cao.

Từ đó luận án cung cấp cơ sở khoa học bằng các nhận xét kiến nghị để đề xuất các giải pháp thiết kế dạng kết cấu chỏm thoải và tấm tròn, và các giải pháp thiết kế chế tạo vật liệu FGM và FG-GPLRC phù hợp với ứng dụng thực tế trong xây dựng công trình. Đồng thời, luận án đưa ra những kiến nghị quan trọng nhằm định hướng việc xây dựng tiêu chuẩn thiết kế cho các kết cấu này trong tương lai.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng được quan tâm trong luận án là:

- Các kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp gồm chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip và kết cấu tấm tròn.

- Các loại vật liệu tiên tiến gồm FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC, FG-GPLRC rỗng, và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng.

Phạm vi nghiên cứu của luận án là bài toán ổn định và sau mất ổn định đàn hồi phi tuyến của kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn bằng các loại vật liệu tiên tiến FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC, FG-GPLRC rỗng, và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng.

Phương pháp nghiên cứu

Luận án này sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết bằng cách tiếp cận giải tích, sử dụng FSDT và R3SDT.

Bài toán được tiếp cận theo hai cách khác nhau: tiếp cận theo chuyển vị và tiếp cận theo hàm ứng suất.

Hai phương pháp được sử dụng gồm: Phương pháp Galerkin và phương pháp năng lượng Ritz để dẫn ra hệ phương trình đại số phi tuyến.

Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án

Ý nghĩa khoa học của luận án:

 Luận án lần đầu giải quyết bài toán phân tích ổn định và sau mất ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu vỏ chỏm thoải có độ cong phức tạp gồm chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rõng và sandwich FG-GPLRC lõi rõng theo FSDT.

- Luận án giải quyết các bài toán cơ bản về ổn định và sau mất ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn bằng các loại vật liệu tiên tiến như FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng theo R3SDT. Thiết lập lời giải và thu được các kết quả về tải nhiệt tới hạn và khả năng chịu tải sau mất ổn định cơ nhiệt dưới dạng hiển.

- Luận án sử dụng hai cách tiếp cận (tiếp cận theo chuyển vị và tiếp cận theo hàm ứng suất), hai phương pháp (phương pháp Galerkin và phương pháp Ritz), và hai dạng nghiệm (dạng nghiệm lượng giác và dạng nghiệm đa thức) đóng góp thêm vào các hiểu biết và kiến thức về phân tích ổn định và sau mất ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn bằng các loại vật liệu FGM và FG-GPLRC đầy tiềm năng này.

Ý nghĩa thực tiễn của luận án:

- Luận án nghiên cứu ứng xử ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải, vỏ chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn, được làm từ các loại vật liệu tiên tiến như FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC, FG-GPLRC rỗng và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng với các điều kiện làm việc phù hợp với thực tế. Các kết quả của bài toán được thể hiện dưới dạng hiển và được ứng dụng trong các khảo sát số một cách chi tiết để đánh giá khả năng chịu tải của kết cấu khi các thông số đầu vào thay đổi. Từ đó, nghiên cứu cung cấp các nhận xét quan trọng về ảnh hưởng của các thông số tới ứng xử ổn định và sau mất ổn định của các kết cấu này.

- Kết quả của luận án có thể được ứng dụng trong công tác thiết kế, thi công và bảo trì các kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn FGM và FG-GPLRC.

- Các kết quả của luận án có giá trị tham khảo quan trọng cho việc thiết kế và chế tạo các loại vật liệu FGM và FG-GPLRC nhằm hướng tới sản xuất thương mại hóa, đáp ứng nhu cầu thực tế trong ngành xây dựng.

 Các kết quả của luận án có thể làm cơ sở khoa học trong công tác xây dựng các tiêu chuẩn thiết kế cho các kết cấu này trong tương lai.

Bố cục của luận án

Luận án bao gồm phần mở đầu, chương tổng quan và 3 chương chính, phần kết luận, danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án, tài liệu tham khảo và phụ lục. Nội dung chính của luận án được trình bày như sau:

- Chương 1 trình bày tổng quan vấn đề nghiên cứu về kết cấu công trình có dạng chỏm thoải có độ cong phức tạp và kết cấu tấm tròn làm từ các loại vật liệu composite tiên tiến FGM và FG-GPLRC; các nghiên cứu trong nước và quốc tế về kết cấu tấm vỏ làm bằng các loại vật liệu FGM và FG-GPLRC; tính chất hiệu dụng của các loại vật liệu gồm FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC, FG-GPLRC rỗng và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng được nghiên cúu trong luận án.

- Chương 2 nghiên cứu bài toán ổn định phi tuyến của kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn FG-GPLRC rỗng và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng theo FSDT bằng cách tiếp cận chuyển vị. Trong đó dạng nghiệm lượng giác được lựa chọn với phương pháp Galerkin. Các kết cấu chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip lần đầu tiên được nghiên cứu.

- Chương 3 nghiên cứu bài toán ổn định phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn bằng các vật liệu FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC đặc và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng theo R3SDT, bằng cách tiếp cận theo chuyển vị và phương pháp năng lượng Ritz. R3SDT được sử dụng hiệu quả trong phân tích kết cấu tấm và vỏ composite dị dướng nhưng phức tạp hơn về mặt toán học nên số lượng các nghiên cứu về kết cấu chỏm cầu thoải sử dụng R3SDT còn rất hạn chế.

- Chương 4 nghiên cứu bài toán ốn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC rỗng tiếp cận theo hàm ứng suất theo FSDT và phương pháp Ritz để giải bài toán. FG-GPLRC rỗng có hệ số Poisson thay đổi nên việc xác định hàm ứng suất gặp nhiều khó khăn và chưa từng được công bố trước đó.

Nội dung cụ thể của các chương được trình bày dưới đây.

Chương 1. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

1.1. Giới thiệu kết cấu chỏm thoải và tấm tròn, vật liệu FGM và FG-GPLRC 1.1.1. Giới thiệu kết cấu công trình chỏm thoải và tấm tròn

Chỏm thoải và tấm tròn là những kết cấu thường gặp trong các công trình xây dựng có ý nghĩa đặc biệt, trong đó chỏm cầu thoải là dạng phổ biến nhất. Chỏm cầu thoải được tạo bằng cách cắt một phần chóp của hình cầu bằng một mặt phẳng nằm ngang, trong đó độ nâng cao nhất tại đỉnh rất nhỏ so với bán kính đáy. Về mặt cơ học, trường hợp phức tạp hơn của chỏm cầu là các chỏm hình parabol, chỏm hình sin và chỏm hình elip, sau đây các kết cấu này được gọi chung là *kết cấu chỏm thoải*. Đặc biệt khi độ nâng lớn nhất tại đỉnh của chỏm bằng không thì kết cấu chỏm thoải trở thành kết cấu tấm tròn (Hình 1.1).



Hình 1.1. Hình dạng của kết cấu công trình chỏm thoải và tấm tròn

Kết cấu chỏm thoải và tấm tròn đã sớm xuất hiện và phát triển mạnh mẽ trong kiến trúc công trình từ xa xưa như công trình đền thờ, cung điện và các công trình biểu tượng lớn trên thế giới. Chỏm thoải và tấm tròn thường xuất hiện trong các kết cấu dạng tấm vỏ như: mái vòm, tấm chịu nhiệt, tường vách, sàn... Chúng là một giải pháp linh hoạt tối ưu không gian và diện tích sử dụng nhờ sự chắc chắn của kết cấu có thể tạo ra không gian rộng lớn mà không cần đến hệ thống dầm, cột truyền thống. Kết cấu chỏm thoải có khả năng phân bổ tải trọng đều đặn, giúp giảm khối lượng vật liệu cần sử dụng và giảm chi phí xây dựng. Ngoài ra thiết kế chỏm thoải và tấm tròn mang lại nét thẩm mỹ độc đáo, sự thân thiện với môi trường, tối ưu hiệu quả năng lượng và độ bền vững của công trình. Kết cấu này được sử dụng phù hợp trong nhiều loại công trình với quy mô từ nhỏ đến lớn như:

- Công trình dân dụng: mái của các nhà kho, nhà xưởng, mái của công trình nhà ở các khu đô thị hiện đại hoặc những công trình yêu cầu tính thẩm mỹ cao, mái chỏm thoải có thể mang lại hiệu quả thẩm mỹ và tăng cường khả năng chống chịu thời tiết.

- Công trình tôn giáo, văn hóa: chùa, nhà thờ, đền thờ sử dụng kết cấu này tạo không gian linh thiêng đồng thời đảm bảo khả năng chịu lực và chống chịu thời tiết.

- Công trình thương mại và du lịch: các công trình khách sạn, resort hay khu nghỉ dưỡng, mái và kết cấu chỏm thoải và tấm tròn có thể tạo ra không gian rộng rãi, mở và thoáng mát, phù hợp với môi trường thiên nhiên.

- Công trình công cộng: nhà hát, bảo tàng, sân vận động, nhà ga, các công trình triển lãm thường sử dụng kết cấu này để tạo không gian rộng rãi và kiến trúc ấn tượng đồng thời có khả năng chống chịu với các yếu tố thời tiết khắc nghiệt.

- Công trình công nghiệp: các bể chứa, silo và nhà máy cũng áp dụng kết cấu chỏm thoải và tấm tròn để tối ưu hóa không gian và hiệu quả sử dụng.

- Công trình lưu trữ: hầm chứa vật liệu, kho chứa hàng hóa, hầm chống thiên tai sử dụng kết cấu mái chỏm thoải và tấm tròn nhờ vào khả năng chịu tải trọng cao, dễ thi công và giảm thiểu vật liệu.

- Công trình quân sự: boong-ke, hầm trú ẩn sử dụng kết cấu này để tăng cường khả năng chịu lực và bảo vệ.

Với những tiến bộ trong kỹ thuật xây dựng, kết cấu chỏm thoải và tấm tròn đã và đang được áp dụng vào nhiều công trình hiện đại như nhà hát, nhà thờ, nhà quốc hội, sân bay, nhà thi đấu, boong-ke chống bom, hầm trú ẩn... Đặc biệt, chúng còn xuất hiện trong các công trình đặc biệt mang tính thử nghiệm như: các tòa nhà thông minh ứng dụng công nghệ tiết kiệm năng lượng, các công trình dưới nước như khách sạn dưới đáy biển, phòng nghiên cứu hải dương học và các công trình trên địa hình khắc nghiệt như vùng núi cao, sa mạc, hoặc khu vực chịu tác động của thiên tai và hóa chất.



Hình 1.2. Một số công trình sử dụng kết cấu chỏm thoải và tấm tròn

Trong tương lai, với sự phát triển của vật liệu xây dựng mới như vật liệu composite và nanocomposite cường độ cao, kết cấu chỏm thoải và tấm tròn hứa hẹn sẽ trở thành một xu hướng thiết kế phổ biến. Việc kết hợp giữa tính thẩm mỹ, khả năng chịu lực tốt và hiệu quả sử dụng không gian sẽ giúp loại kết cấu này tiếp tục được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực kiến trúc và xây dựng trên toàn cầu.

1.1.2. Giới thiệu vật liệu FGM và FG-GPLRC

Vật liệu composite tiên tiến đã và đang là xu thế phát triển được nghiên cứu ứng dụng rộng rãi trong các kết cấu công trình xây dựng trên thế giới [45, 72, 74, 90]. Chúng có nhiều ưu điểm vượt trội so với các vật liệu truyền thống: nhẹ hơn, bền hơn, linh hoạt hơn, khả năng cách nhiệt, cách âm tốt hơn. Điển hình trong đó là vật liệu composite cơ tính biến thiên FGM được giới thiệu vào năm 1984 bởi một nhóm các nhà khoa học Nhật Bản [73]. Kể từ đó, số lượng các công trình nghiên cứu về ứng dung của vật liêu FGM trong các kết cấu như dầm, tấm và vỏ đã tăng lên đáng kể [22, 63, 64, 67, 86, 96, 134, 142,]. FGM có các đặc tính vật liệu biến đổi trơn và liên tuc từ mặt này sang mặt khác do đó làm giảm ứng suất nhiệt, giảm ứng suất tập trung và giảm ứng suất dư thường gặp trong các loại composite lớp thông thường. FGM được cấu tao từ hai hay nhiều vật liêu thành phần với tỷ lê phối trôn đảm bảo tỷ phần thể tích của các vật liêu thành phần biến đổi theo một quy luật trơn và liên tục theo một số hướng nhất đinh [128]. Trong đó, FGM điển hình được cấu tao gồm hai vật liệu thành phần là kim loại và gốm (ceramic) với tỷ phần thể tích biến đổi trơn và liên tục theo hướng chiều dày kết cấu, nhờ đó vừa có khả năng chịu nhiệt tốt và độ cứng cao của gốm vừa có tính dẻo dai của kim loại để hạn chế sự rạn nứt của vật liệu. FGM có thể chịu được tải trọng lớn và nhiệt độ cao đáp ứng yêu cầu cấp thiết trong các thiết kế kỹ thuật nói chung và ngành xây dựng công trình nói riêng.

Trong lĩnh vực vật liệu nanocomposite, Graphene đang trở thành vật liệu gia cố phổ biến được ưa chuộng những năm gần đây nhờ sở hữu các tính chất cơ, nhiệt và điện tuyệt vời [11, 41, 48, 89, 92, 124, 139]. Được phát hiện năm 2004 bởi Andre Geim và Konstantin Novoselov, vật liệu này có khả năng tương tác tốt với các vật liệu nền nhờ diện tích bề mặt lớn và có thể gia cường trực giao [69, 93, 122]. Khi được gia cường trong nền polyme, graphene giúp tăng mô đun đàn hồi tới 98.7% [75, 140]. Graphene sheet và Graphene platelet (GPL) là hai dạng tồn tại phổ biến của Graphene được nghiên cứu và ứng dụng rộng rãi. Về mặt lý thuyết, Graphene sheet là vật liệu hai chiều đơn lớp phẳng (2D) được tạo thành từ các hạt carbon liên kết trong cấu trúc mạng lục giác có độ dày 0.34 nm, và GPL là các mảnh graphene nhỏ với số lớp từ 1 đến 10 [47, 88]. Trong số các dạng graphene, ngày càng có nhiều các công trình nghiên cứu về vật liệu composite gia cố GPL trong các kết cấu dầm, tấm,

vỏ được công bố [23, 34, 43, 80, 100, 131, 135, 136]. Trải qua nhiều công trình nghiên cứu và phát triển về công nghệ sản xuất, đến nay GPL đã có thể được sản xuất hàng loạt trong công nghiệp với chi phí thấp [33].



Hình 1.3. Cấu trúc nguyên tử của Graphene sheet [33]

Đối với cấu trúc vĩ mô GPL được gia cường vào trong nền polyme hoặc nền kim loại bằng một hàm phân bố liên tục hoặc từng phần theo chiều dày kết cấu tạo ra vật liệu nanocomposite graphene cơ tính biến thiên (FG-GPLRC) có cấu trúc bền vững ứng dụng trong kỹ thuật nói chung và cho ngành xây dựng trong tương lai nói riêng. Nhiều công trình nghiên cứu đã chỉ ra rằng với tỷ phần khối lượng nhỏ GPL cũng làm tăng đáng kể khả năng chịu lực của FG-GPLRC [9].



Hình 1.4. Hình ảnh của GPL trên thị trường qua kính hiển vi điện tử quét (SEM), có
 độ dày 10nm và đường kính trung bình 8μm [40]

1.1.3. Tiềm năng ứng dụng của kết cấu công trình chỏm thoải và tấm tròn bằng FGM và FG-GPLRC

FGM và FG-GPLRC là những vật liệu xây dựng tiên tiến, có trọng lượng nhẹ, độ cứng và độ bền cao cùng với tuổi thọ dài. Những đặc tính này mở ra nhiều cơ hội mới trong ngành xây dựng và kiến trúc, cho phép tạo ra các kết cấu vừa nhẹ vừa vững chắc, đồng thời mang tính thẩm mỹ cao. FGM và FG-GPLRC có những ưu điểm vượt trội được xem là lựa chọn lý tưởng cho các ứng dụng trong công trình xây dựng, bao gồm:

- Khả năng chịu lực va đập, chịu kéo tốt, cách âm, cách nhiệt, chống cháy, chống thấm nước, chống ăn mòn bởi các hóa chất, axit.

- Trọng lượng nhẹ giúp thuận tiện cho quá trình vận chuyển, dễ dàng cho việc thao tác thi công lắp đặt, lắp ghép các kết cấu công trình.

- Khả năng chế tạo được các dạng kết cấu công trình linh hoạt, đa dạng hình thái, tạo ra các kết cấu mới mà vật liệu truyền thống không đáp ứng được. Điều này cho phép kiến trúc sư có thêm sự lựa chọn trong thiết kế, thể hiện được các ý tưởng thiết kế mới độc đáo, sáng tạo, hiện đại, mang nét văn hóa, mang tính biểu tượng.

- Vượt được khẩu độ lớn, tạo ra không gian sử dụng rộng lớn.

- Đảm bảo tính ổn định về các thông số kỹ thuật xây dựng trong công trình.

Kết cấu dạng chỏm thoải và tấm tròn với khả năng chịu lực tốt, hình dáng độc đáo, tối ưu không gian sử dụng, là lựa chọn lý tưởng cho việc ứng dụng FGM và FG-GPLRC. Các kết cấu chỏm thoải và tấm tròn bằng FGM và FG-GPLRC có tiềm năng sử dụng rộng rãi trong các công trình xây dựng với nhiều kích thước khác nhau như:

- Công trình có yêu cầu kiến trúc phức tạp: nhà hát, bảo tàng, trung tâm hội nghị với thiết kế độc đáo và sáng tạo.

 Công trình trong điều kiện khắc nghiệt: nhà máy, lò phản ứng hạt nhân, cơ sở nghiên cứu khoa học hoạt động trong môi trường nhiệt độ cao hoặc chịu tải trọng phức tạp.

 Công trình thương mại và du lịch: khách sạn, khu nghỉ dưỡng, trung tâm mua sắm với không gian rộng lớn và thiết kế ấn tượng.

- Công trình văn hóa và tôn giáo: đền chùa, nhà thờ với kiến trúc mang tính biểu tượng và bền vững theo thời gian.

 Công trình quân sự: boong-ke, hầm trú ẩn yêu cầu độ bền, độ cứng và độ ổn định cao.

Việc ứng dụng FGM và FG-GPLRC trong kết cấu chỏm thoải và tấm tròn không chỉ nâng cao hiệu quả sử dụng vật liệu mà còn mở ra hướng đi mới cho thiết kế kiến trúc hiện đại, kết hợp giữa tính thẩm mỹ và hiệu quả kỹ thuật.

1.2. Tình hình nghiên cứu trong nước và quốc tế về ứng xử cơ nhiệt của kết cấu tấm vỏ bằng FGM và FG-GPLRC

1.2.1. Kết cấu tấm, panel trụ, vỏ thoải hai độ cong FGM và FG-GPLRC

Tấm, panel trụ và vỏ thoải hai độ cong là những dạng kết cấu tấm vỏ phổ biến, đóng vai trò quan trọng trong ngành kỹ thuật nói chung và đặc biệt trong lĩnh vực xây dựng công trình. Cho đến nay, các nghiên cứu về kết cấu tấm, panel trụ và vỏ thoải hai độ cong làm từ vật liệu FGM và FG-GPLRC đã đạt được nhiều thành tựu nổi bật trong việc phân tích ứng xử ổn định tĩnh và động dưới tác động của tải trọng cơ, nhiệt và cơ nhiệt kết hợp. Những nghiên cứu này đã được thực hiện dựa trên nhiều lý thuyết và phương pháp tiếp cận đa dạng. Trong phần này, luận án sẽ tập trung trình bày các nghiên cứu tiêu biểu, phù hợp nhất với phạm vi và mục tiêu của đề tài.

Đối với vật liêu FGM, các nghiên cứu về ổn đinh và đông lực phi tuyến của các kết cấu panel tru và panel cầu đã được thực hiện bởi nhiều nhóm tác giả. Đầu tiện, nhóm tác giả Shen và công sư [108, 110, 111, 113, 114] đã tiến hành nghiên cứu sâu rộng về các vấn đề như xác định tải tới hạn, mối quan hệ giữa độ võng và tải trọng, tần số dao động tự do tuyến tính, cũng như đáp ứng động lực phi tuyến (độ võng theo thời gian) của các kết cấu panel trụ, panel cầu FGM dưới tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt và cơ nhiệt kết hợp. Trong các nghiên cứu này, nhóm tác giả đã sử dụng HSDT để thiết lập các phương trình chủ đạo. Các bài toán được giải bằng nhiều phương pháp bao gồm: phương pháp Galerkin, kỹ thuật nhiễu hai bước. Tiếp theo, nhóm tác giả Kiani và cộng sự [71] đã áp dụng lý thuyết vỏ Sanders cải tiến và FSDT để nghiên cứu panel cầu thoải FGM đặt trên nền đàn hồi Pasternak về bài toán ổn định, dao động tự do và động lực của vỏ. Song song đó, nhóm tác giả Alibeigoo và cộng sự [12, 14] đã sử dung chuỗi Fourier mở rông để đưa ra nghiêm giải tích của trường chuyển vị, trường ứng suất, trường nhiệt độ và tần số dao động cơ bản trong phân tích ổn định tĩnh và dao động tự do của panel trụ sandwich FGM dưới tác dụng của tải cơ nhiệt kết hợp theo lý thuyết đàn hồi ba chiều. Tại Việt Nam, nhóm tác giả Nguyễn Đình Đức và Hoàng Văn Tùng [36, 127] đã tập trung nghiên cứu ổn định phi tuyến của tấm và panel trụ FGM, xét tới các thành phần phi tuyến hình học theo von Kármán và độ không hoàn hảo ban đầu của kết cấu. Trong các nghiên cứu này, các tác giả thiết lập các phương trình chủ đạo theo lý thuyết vỏ Donnell và lựa chọn phương pháp Galerkin để giải bài toán. Ngoài ra, tác giả Đào Văn Dũng và Lê Khả Hòa [39] đã sử dụng lý thuyết vỏ Donnell để nghiên cứu ứng xử ổn định tĩnh phi tuyến của panel trụ FGM có xét tới hệ số Poisson thay đổi theo chiều dày vỏ, làm việc với các điều kiện biên khác nhau.

Đối với vật liệu FG-GPLRC, các nghiên cứu cũng đạt được nhiều kết quả đáng kể. Nhóm tác giả Song và cộng sự [121] đã nghiên cứu ứng xử ổn định của các tấm chữ nhật FG-GPLRC có đô võng không hoàn hảo ban đầu, xét tới phi tuyến hình học theo von Kármán dưới tác dụng bởi tải trọng nén hai phương. Các phương trình chủ đạo được thiết lập theo HSDT. Nhóm tác giả Wang và cộng sự [132] đã sử dụng HSDT kết hợp với nguyên lý Hamilton để phân tích dao động của tấm vành khuyên FG-GPLRC khi chiu tải trọng trong môi trường nhiệt. Tương tự, nhóm nghiên cứu Ansari và công sư [19] cũng áp dung HSDT để nghiên cứu ổn đinh của tấm chữ nhật FG-GPLRC rong với các điều kiên biên khác nhau. Karimiasl và Alibeigloo [68] phân tích về dao động tự do và dao động cưỡng bức phi tuyến của các panel trụ sandwich FG-GPLRC với lõi auxetic tổ ong bằng cách đưa ra các công thức cơ bản dựa trên HSDT, áp dụng phương pháp cầu phương vi phân tổng quát (GDQM) và kỹ thuật nhiễu. Bên cạnh đó, nhóm tác giả Zhao và cộng sự [141] đã phân tích uốn và dao động theo phương pháp phần tử hữu hạn đối với tấm hình thang FG-GPLRC. Ngoài ra, các nghiên cứu về uốn, dao động, ứng xử nhiệt - đàn hồi của các kết cấu vỏ thoải hai độ cong và panel trụ FG-GPLRC cũng được thực hiện bởi nhiều nhóm tác giả, nổi bật như: Alibeigloo [13], Cao Văn Đoàn và Vũ Hoài Nam [35], Esmaeili và cộng sự [43], Heydarpour và cộng sự [52], Zhang và cộng sự [138]. Các nghiên cứu này đã áp dung nhiều lý thuyết khác nhau, từ lý thuyết vỏ Donnell đến FSDT và HSDT, nhằm đưa ra các phân tích toàn diện về ứng xử cơ nhiệt của các kết cấu FG-GPLRC.

1.2.2. Kết cấu vỏ trụ, vỏ trống FGM và FG-GPLRC

Vỏ trụ và vỏ trống FGM và FG-GPLRC cũng có số lượng các công trình nghiên cứu đồ sộ cả trong nước và quốc tế. Trong phần này, luận án lựa chọn giới thiệu các nghiên cứu điển hình có liên quan đến mục tiêu và phạm vi nghiên cứu của đề tài.

Nhóm tác giả Shen cùng cộng sự đã có nhiều đóng góp quan trọng trong việc phân tích ứng xử sau mất ổn định phi tuyến của kết cấu vỏ FGM, sử dụng các lý

thuyết và phương pháp khác nhau. Cu thể, các nghiên cứu của ho bao gồm phân tích ổn định phi tuyến của vỏ tru FGM chiu tải áp lực ngoài trong môi trường nhiệt [105], tải nén dọc trục trong môi trường nhiệt [104], và tải nhiệt đều [106], với các phương trình chủ đạo được thiết lập theo lý thuyết vỏ Donnell. Theo HSDT nhóm tác giả đã thiết lập các phương trình chủ đạo và sử dụng các nghiệm tiệm cận cùng phương pháp lặp đơn để phân tích ứng xử sau mất ổn định phi tuyến của vỏ trụ FGM chịu nhiệt độ tăng đều và nhiệt truyền qua chiều dày [107], chịu tải áp lực ngoài kết hợp với tải nén doc truc [112], và tải nén doc truc có tương tác với môi trường đàn hồi xung quanh [109]. Theo lý thuyết vỏ Donnell, đóng góp đáng kể khác đến từ tác giả Huang và Han đã giải quyết các bài toán ổn đinh phi tuyến của vỏ tru FGM chiu tải áp lực ngoài [58], nén doc truc [56], và tải nén doc truc kết hợp với áp lực ngoài trong môi trường nhiệt [55]. Các tác giả sử dung dang nghiệm đô võng ba số hang và phương pháp năng lương Ritz để giải bài toán. Ngoài ra, trong các nghiên cứu [54-59] Huang và Han đã áp dụng phương pháp giá trị riêng (eigenvalue method) và tiếp cận theo hàm ứng suất để nghiên cứu ứng xử ổn định tĩnh và động phi tuyến của vỏ trụ FGM dưới tác động của tải cơ và tải nhiệt. Tác giả Sofiyev và cộng sự [116-120] đã công bố nhiều nghiên cứu toàn diện về ứng xử ổn định và dao động của vỏ trụ sandwich FGM dưới tác dụng của nhiều loại tải trọng tĩnh và tải trọng thay đổi điều hòa theo thời gian sử dụng phương pháp Galerkin. Trong khi đó, tác giả Alibeigoo và Rajaee [15] đã áp dụng phương pháp giải tích và bán giải tích để phân tích ứng xử ổn định và dao đông tư do của kết cấu vỏ tru sandwich FGM có các điều kiên biên khác nhau.

Trong những năm gần đây, các nhóm nghiên cứu tại Việt Nam cũng có nhiều đóng góp quan trọng. Nhóm tác giả Vũ Hoài Nam và cộng sự [84] đã phân tích ổn định phi tuyến của vỏ trụ và vỏ trống FGM rỗng chịu tải xoắn bằng lý thuyết vỏ Donnell và dạng nghiệm ba số hạng. Nhóm tác giả Nguyễn Đình Đức và cộng sự [38] đã nghiên cứu ổn định tĩnh phi tuyến của vỏ trụ tròn FGM có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ và nền đàn hồi xung quanh theo HSDT. Tác giả Đào Huy Bích và Nguyễn Xuân Nguyên [27] đã phân tích dao động phi tuyến của vỏ trụ FGM, trong đó thành phần độ cong của vỏ được tính đến trong các thành phần độ cong do biến dạng khi thiết lập hệ phương trình cân bằng theo các thành phần chuyển vị chịu tải trọng áp lực ngoài bằng lý thuyết vỏ Donnell cải tiến. Đối với các kết cấu vỏ trụ FG-GPLRC, nhóm tác giả Blooriyan và cộng sự [29] đã sử dụng phương pháp năng lượng Ritz để phân tích ứng xử ổn định dưới tác dụng của tải nén dọc trục và tải áp lực ngang, với các phương trình chủ đạo được lập dựa trên lý thuyết vỏ Donnell và tính phi tuyến hình học von Kármán. Đáp ứng động của kết cấu vỏ trụ FG-GPLRC chịu tải trọng xung trong môi trường nhiệt được nhóm tác giả Heydarpour và cộng sự [53] đã phân tích dựa trên FSDT, trong đó phương pháp DQ-Heaviside-NURBS kết hợp được sử dụng. Nhóm tác giả Yang và cộng sự [136] đã phân tích dao động tự do và ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC khi quay lệch tâm, với năm quy luật phân bố của GPL theo chiều dày của vỏ được khảo sát, sử dụng phương pháp Galerkin để giải bài toán, các phương trình chủ đạo có tính đến phi tuyến hình học von Kármán được thiết lập dựa trên nguyên lý Hamilton và FSDT. Ngoài ra, Huang và cộng sự [60] đã phân tích ứng suất nhiệt – đàn hồi của vỏ trụ FG-GPLRC với năm quy luật phân bố tỷ phần khối lượng GPL theo chiều dày bằng phương pháp giải tích với nghiệm chính xác.

1.2.3. Kết cấu vỏ chỏm thoải và tấm tròn FGM

Chỏm cầu thoải và tấm tròn FGM là những kết cấu có ứng xử cơ nhiệt phức tạp, thu hút sự quan tâm nghiên cứu sâu rộng trong những năm gần đây. Trong phần này, các nghiên cứu trong nước và quốc tế có cách tiếp cận tương đồng với hướng nghiên cứu của luận án sẽ được tổng hợp và trình bày chi tiết.

Nhiều lý thuyết khác nhau được sử dụng để phân tích ổn định cơ nhiệt và dao động của kết cấu tấm tròn FGM như: lý thuyết tấm mỏng chuyển vị lớn [102, 46], FSDT [49], lý thuyết đàn hồi ba chiều [62] và phương pháp phần tử miền-biên [42]. Ngoài ra, Reddy và cộng sự [99] đã sử dụng các lý thuyết tấm vỏ mỏng, FSDT và lý thuyết biến dạng trượt bậc ba trong phân tích ứng xử uốn đối xứng trục của kết cấu tấm tròn FGM với các điều kiện biên khác nhau. Bài toán phân tích giới hạn đàn hồi chịu tải trọng cơ nhiệt của kết cấu tấm tròn FGM cũng đã được nghiên cứu bằng phương pháp Galerkin bởi Madan và Bhowmick [78].

Đối với kết cấu chỏm cầu thoải FGM nhiều nhóm tác giả sử dụng hệ tọa độ cực để thay thế xấp xỉ cho hệ tọa độ cầu phức tạp như: Boroujerdy và Eslami [30, 31] phân tích ảnh hưởng của các lớp áp điện đến ứng xử đối xứng trục phi tuyến, trong khi Moosaie và Panahi-Kalus [81] phân tích ứng suất nhiệt của chỏm cầu FGM không nén được với tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ. Shahsial và cộng sự [103] đã phân tích ổn đinh tĩnh của các chỏm cầu thoải FGM chiu tải nhiêt tăng đều, tải nhiêt biến đổi tuyến tính và tải nhiệt biến đổi phi tuyến theo lý thuyết Donnell - Mushtari -Vlasov và phương pháp biến phân. Boroujerdy và Eslami [32] cũng đã phân tích ổn định bất đối xứng trục của chỏm cầu thoải FGM áp điện với biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến dưới tải nhiệt dựa trên FSDT. Prakash và cộng sự [94] đã sử dụng phương pháp tích hợp số của Newmark kết hợp với sơ đồ lặp Newton – Raphson cải tiến để phân tích ổn đinh nhiệt động phi tuyến của chỏm cầu FGM. Tại Việt Nam, các nghiên cứu về kết cấu chỏm cầu thoải FGM cũng đã được thực hiên. Tác giả Đức và công sư [37] đã tiếp cân theo ứng suất, GS.TSKH. Đào Huy Bích và công sư [28] cũng tiếp cân theo ứng suất, trong khi Tùng [125] tiếp cân theo chuyển vi và [126] tiếp cân theo ứng suất bằng phương pháp Galerkin với các phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển hoặc FSDT. Các nghiên cứu này đã thu được các biểu thức hiển của tải tới han và các mối quan hệ tải trong – đô võng để phân tích các kết cấu chỏm cầu thoải FGM đặt trên nền đàn hồi có tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ, biến dạng đối xứng trục, xét đến phi tuyến hình học von Kármán và sự không hoàn hảo ban đầu. Tác giả Vũ Thị Thùy Anh và Nguyễn Đình Đức [17] đã phân tích mất ổn định và dao động phi tuyến của kết cấu chỏm cầu FGM có biến dạng đối xứng trục đặt trên nền đàn hồi Pasternak theo FSDT. Nhóm tác giả GS.TSKH. Đào Huy Bích và cộng sự đã nghiên cứu ứng xử dao động và ổn định động của các kết cấu chỏm cầu thoải FGM không hoàn hảo có biến dạng đối xứng trục xét đến tính phi tuyến hình học Von Kármán [24-26]. Kết cấu đặt trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải cơ và tải cơ nhiệt kết hợp. Trong đó, các tác giả áp dụng lý thuyết vỏ cổ điển tiếp cận bài toán theo hàm ứng suất và sử dụng phương pháp Galerkin để đưa ra hệ phương trình chủ đạo sau đó giải bằng phương pháp Runge – Kutta và tiêu chuẩn Budiansky – Roth để có được tải tới hạn động.

Đối với kết cấu chỏm cầu và tấm tròn FGM dạng sandwich, các vấn đề động lực, uốn, mất ổn định, dao động phi tuyến đã được nhiều nhóm nghiên cứu công bố trong các tài liệu mở. Nhóm nghiên cứu của Phương và cộng sự [91] đã sử dụng tiếp cận bán giải tích, các phương trình chủ đạo được rút ra bằng cách sử dụng FSDT có xét đến phi tuyến hình học của von Kármán và nền đàn hồi hai tham số Pasternak.

Các phương trình chuyển động được giải bằng nghiệm đa thức và phương pháp Runge – Kutta để phân tích dao động phi tuyến của kết cấu chỏm cầu và tấm tròn sandwich FGM biến dạng đối xứng trục chịu áp lực ngoài trong môi trường nhiệt. Minh và cộng sự [79] đã nghiên cứu các đáp ứng động của kết cấu chỏm cầu sandwich FGM đối xứng trục có lõi xốp nhẹ chịu tải trọng áp lực ngoài phân bố đều và đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Các tác giả dựa trên FSDT với tính phi tuyến hình học của von Kármán để thiết lập phương trình chủ đạo, sử dụng phương pháp Galerkin và phương pháp Runge – Kutta để thu được các tần số cơ bản và đáp ứng động phi tuyến của vỏ, từ đó xem xét ảnh hưởng của hệ số xốp, các thông số hình học và hệ số nền.

1.2.4. Kết cấu vỏ chỏm thoải và tấm tròn FG-GPLRC

Các nghiên cứu về sự mất ổn định phi tuyến và dao động của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPRC được đặc biệt quan tâm trong những năm gần đây. Do sự phức tạp hơn về mặt toán học nên số lượng các công trình nghiên cứu của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPRC là ít hơn hẳn so với FGM.

Đối với các tấm tròn FG-GPLRC, nhóm nghiên cứu của Huo và cộng sự [61] đã nghiên cứu vấn đề uốn của tấm tròn và tấm hình khuyên FG-GPLRC bằng cách áp dụng lý thuyết độ rỗng 3D. Trong khi, nhóm nghiên cứu của Javani và cộng sự [66] đã công bố các kết quả về ứng xử dao động tự do phi tuyến của tấm tròn FG-GPLRC đặt trên nền đàn hồi phi tuyến, sử dụng FSDT kết hợp với quy tắc vi cơ Halpin – Tsai và phương pháp GDQM. Tác giả Sobhy [115] đã nghiên cứu vấn đề uốn đối xứng trục của tấm hình khuyên và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng với các điều kiện biên khác nhau, chịu tải cơ và lớp áp điện bên ngoài, sử dụng phương pháp GDQM để giải các phương trình chủ đạo. Ngoài ra, nhóm nghiên cứu Javani và cộng sự [65] đã phân tích sự mất ổn định nhiệt của các tấm hình khuyên sandwich FG-GPLRC bằng cách kết hợp sử dụng FSDT, phi tuyến hình học von Kármán và phương pháp GDQM. Safarpour và cộng sự [101] đã công bố nghiên cứu về dao động tự do phi tuyến của tấm hình khuyên FG-GPLRC chịu tải cơ nhiệt kết hợp, dựa trên HSDT kết hợp với nguyên lý Hamilton và sử dụng phương pháp GDQM để giải.

Đối với kết cấu chỏm cầu FG-GPLRC, nhóm nghiên cứu Heydarpour và cộng sự [51] đã nghiên cứu ứng xử nhiệt – đàn hồi của chỏm cầu FG-GPLRC dựa trên lý thuyết đàn hồi nhiệt Lord – Shulman và phương pháp cầu phương vi phân từng lớp (LW-DQM) kết hợp với thuật toán Newton – Raphson. Nhóm nghiên cứu Liu và cộng sự [76] đã phân tích dao động tự do và uốn của vỏ cầu FG-GPLRC bằng cách áp dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều và phương pháp không gian trạng thái. Đối với vỏ cầu sandwich FG-GPLRC lõi rỗng đặt trên nền đàn hồi, dựa trên FSDT và phương pháp Galerkin, các đáp ứng động phi tuyến và dao động tự do đã được nghiên cứu bởi Vũ Thị Thùy Anh và cộng sự [18].

1.3. Tính chất hiệu dụng của các loại FGM và FG-GPLRC được nghiên cứu trong luận án

1.3.1. FGM rỗng

Ngày nay, vật liệu rỗng được phát triển và ứng dụng cho nhiều công trình quan trọng trong ngành xây dựng vì có trọng lượng nhẹ và có khả năng hấp thụ năng lượng, khả năng cách nhiệt, cách âm tốt hơn vật liệu thông thường. FGM rỗng được giả định có bọt rỗng xuất hiện trong quá trình chế tạo FGM với tỷ phần thể tích bọt rỗng thay đổi theo quy luật xác định dọc theo chiều dày kết cấu. FGM rỗng đã được đề cập trong nhiều nghiên cứu về uốn, ổn định, dao động tự do và đáp ứng động của dầm [20, 133], dầm vi mô [123], vòm [16], tấm chữ nhật [21, 50, 83].



Hình 1.5. Hai quy luật phân bố rỗng của FGM rỗng

Trong nghiên cứu của luận án, FGM rỗng được cấu tạo từ gốm và kim loại có tỷ phần thể tích rỗng phân bố theo hai loại (Hình 1.5) [133]:

- Loại FG-UD: tỷ phần thể tích rỗng phân bố đều theo chiều dày kết cấu. Mô đun đàn hồi E(z) và hệ số dãn nở nhiệt $\alpha(z)$ tại tọa độ $z\left(-\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}\right)$ theo hướng

chiều dày kết cấu của FGM rỗng được xác định như sau:

$$E(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{k} \left[E_{c} - E_{m}\right] + E_{m} - \frac{e}{2}\left[E_{m} + E_{c}\right], \qquad (1.1)$$

$$\alpha(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \left[\alpha_c - \alpha_m\right] + \alpha_m - \frac{e}{2}\left[\alpha_m + \alpha_c\right], \qquad (1.2)$$

- Loại FG-O: tỷ phần thể tích rỗng phân bố không đều theo chiều dày kết cấu với tỷ phần thể tích lỗ rỗng lớn nhất ở lớp giữa và bằng 0 ở lớp trên cùng và lớp dưới cùng. Mô đun đàn hồi E(z) và hệ số dãn nở nhiệt $\alpha(z)$ tại tọa độ $z\left(-\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}\right)$ theo hướng chiều dày kết cấu FGM rỗng được xác định như sau:

$$E(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{k} \left[E_{c} - E_{m}\right] + E_{m} + \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \frac{e}{2} \left[E_{m} + E_{c}\right], \quad (1.3)$$

$$\alpha(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \left[\alpha_c - \alpha_m\right] + \alpha_m + \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \frac{e}{2} \left[\alpha_m + \alpha_c\right], \quad (1.4)$$

với e là độ rỗng $0 \le e < 1$, c và m là các chỉ số dưới để chỉ thành phần gốm và kim loại tương ứng.

Hệ số Poisson của FGM rỗng được coi là không thay đổi v = 0.34.

Các tính chất hiệu dụng của vật liệu thành phần phụ thuộc vào nhiệt độ được xác định như sau:

$$\left[\Pr_{i}(T)\right] = \left[E_{i}, \alpha_{i}\right] = P_{0}\left(1 + P_{3}T^{3} + P_{2}T^{2} + P_{1}T^{1} + P_{-1}T^{-1}\right); \text{ voi } i = c, m \quad (1.5)$$

trong đó:

 $T = T_0 + \Delta T$ (K) với $T_0 = 300 \ K$ là nhiệt độ phòng mà không gây ra ứng suất nhiệt trong kết cấu, ΔT là độ tăng nhiệt độ của kết cấu so với nhiệt độ phòng;

 $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ là các hệ số nhiệt độ được giả định là không đổi đối với các vật liệu thành phần Si_3N_4 / SUS304 của FGM rỗng được cho trong Bảng 1.1.

Bảng 1.1. Hệ số nhiệt độ cho các tính chất của vật liệu thành phần [70]

Vật liệu	Tính chất	P_0	<i>P</i> ₋₁	P_1	P_2	<i>P</i> ₃
Si_3N_4	E(Pa)	3.4843×10 ¹¹	0	-3.070×10 ⁻⁴	2.16×10 ⁻⁷	-8.946×10 ⁻¹¹
	α(1/K)	5.8723×10 ⁻⁶	0	9.095×10 ⁻⁴	0	0
<i>SUS</i> 304	E(Pa)	2.0104×10 ¹¹	0	3.079×10 ⁻⁴	-6.534×10 ⁻⁷	0
	$\alpha(1/K)$	12.33×10 ⁻⁶	0	8.086×10 ⁻⁴	0	0

1.3.2. Sandwich FGM lõi rõng

Trong nghiên cứu của luận án vật liệu sandwich FGM lõi rỗng được cấu tạo bằng sự kết hợp lớp lõi rỗng làm bằng vật liệu thuần nhất kim loại có bề dày h_{pc} và hai lớp mặt được làm bằng FGM có cùng bề dày h_{fs} với thành phần kim loại ở mặt trong và thành phần gốm ở mặt ngoài (Hình 1.6).



Hình 1.6. Cấu trúc sandwich FGM lõi rỗng

Tỷ phần thể tích rỗng của lớp lõi tại tọa độ z theo hướng chiều dày biến thiên theo quy luật:

$$V_p(z) = e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h_{pc}}\right), \quad -\frac{h_{pc}}{2} < z < \frac{h_{pc}}{2}$$
 (1.6)

với e_0 là độ rỗng của lớp lõi ($0 \le e_0 < 1$).

Tính chất hiệu dụng \Pr_{SwFGM} của sandwich FGM lõi rỗng tại tọa độ z $\left(-\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}\right)$ theo hướng chiều dày kết cấu bao gồm: mô đun đàn hồi E(z), hệ số

dãn nở nhiệt $\alpha(z)$ được xác định theo quy tắc hỗn hợp như sau:

$$\begin{bmatrix} \Pr_{SwFGM}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(z), \alpha(z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{cases} \left[\Pr_{c} \right] + \left[\Pr_{m} - \Pr_{c} \right] \left(\frac{2z + 2h_{fs} + h_{pc}}{2h_{fs}} \right)^{k}, -\frac{h}{2} < z < -\frac{h_{pc}}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[\Pr_{m} \right] \left[1 - e_{0} \cos\left(\frac{\pi z}{h_{pc}}\right) \right], -\frac{h_{pc}}{2} < z < \frac{h_{pc}}{2} \end{cases}$$

$$\left[\Pr_{c} \right] + \left[\Pr_{m} - \Pr_{c} \right] \left(\frac{-2z + 2h_{fs} + h_{pc}}{2h_{fs}} \right)^{k}, \frac{h_{pc}}{2} < z < \frac{h}{2} \end{cases}$$

$$(1.7)$$

Hệ số Poisson của sandwich FGM lõi rỗng được coi là không đổi v = 0.34.

Các tính chất hiệu dụng của vật liệu thành phần Si_3N_4 / SUS304 của sandwich FGM lõi rỗng phụ thuộc vào nhiệt độ được xác định bằng công thức (1.5).

1.3.3. FG-GPLRC

Trong nghiên cứu của luận án FG-GPLRC được cấu tạo gồm GPL gia cường trong nền kim loại Đồng. Tỉ phần khối lượng của GPL thay đổi theo chiều dày kết cấu với năm loại phân bố khác nhau (Hình 1.7):



Hình 1.7. Các loại phân bố tỷ phần khối lượng GPL của FG-GPLRC

- Loại UD-GPLRC: tỉ phần khối lượng GPL phân bố đều theo chiều dày kết cấu.

- Loại X-GPLRC: tỉ phần khối lượng GPL phân bố không đều theo chiều dày kết cấu, bằng 0 ở lớp giữa và lớn nhất ở hai lớp trên cùng và dưới cùng.

- Loại O-GPLRC: tỉ phần khối lượng GPL phân bố không đều theo chiều dày kết cấu, lớn nhất ở lớp giữa và bằng 0 ở hai lớp trên cùng và dưới cùng.

 Loại V-GPLRC: tỉ phần khối lượng GPL phân bố không đều theo chiều dày kết cấu, lớn nhất ở lớp trên cùng và bằng 0 ở lớp dưới cùng.
- Loại A-GPLRC: tỉ phần khối lượng GPL phân bố không đều theo chiều dày kết cấu, lớn nhất ở lớp dưới cùng và bằng 0 ở lớp trên cùng.

Mô đun đàn hồi của FG-GPLRC được xác định theo mô hình Halpin-Tsai mở rộng như sau:

$$E(z) = \left[\frac{3 + 3\zeta_1 \delta_1 V_{GPL}(z)}{8 - 8\delta_1 V_{GPL}(z)} + \frac{5 + 5\zeta_2 \delta_2 V_{GPL}(z)}{8 - 8\delta_2 V_{GPL}(z)}\right] E_m,$$
(1.8)

trong đó:

$$\delta_{1} = \frac{\left(E_{GPL}/E_{m}\right) - 1}{\left(E_{GPL}/E_{m}\right) + \zeta_{1}}, \ \delta_{2} = \frac{\left(E_{GPL}/E_{m}\right) - 1}{\left(E_{GPL}/E_{m}\right) + \zeta_{2}},$$
(1.9)

$$\zeta_{1} = 2(a_{GPL}/t_{GPL}), \, \zeta_{2} = 2(b_{GPL}/t_{GPL}),$$
(1.10)

với: E_m và E_{GPL} lần lượt là các mô đun đàn hồi của kim loại Đồng và GPL; a_{GPL} , b_{GPL} , t_{GPL} là các kích thước chiều dài, chiều rộng và chiều dày của GPL tương ứng; $V_{GPL}(z)$ là tỷ phần thể tích của GPL tại tọa độ z được xác định như sau:

$$V_{GPL}(z) = \frac{W_{GPL}(z)}{W_{GPL}(z) + (\rho_{GPL}/\rho_m) [1 - W_{GPL}(z)]},$$
 (1.11)

trong đó: ρ_m và ρ_{GPL} lần lượt là khối lượng riêng của kim loại Đồng và GPL; $W_{GPL}(z)$ là tỷ phần khối lượng của GPL tại tọa độ z được xác định tương ứng với 5 loại phân bố GPL như sau [137]:

$$W_{GPL} \left(z \right) = \begin{cases} W_{GPL}^{*} & \frac{-h}{2} \le z \le \frac{h}{2} & \text{UD-GPLRC}, \\ 4 \frac{|z|}{h} W_{GPL}^{*} & \frac{-h}{2} \le z \le \frac{h}{2} & \text{X-GPLRC}, \\ 2 \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) W_{GPL}^{*} & \frac{-h}{2} \le z \le \frac{h}{2} & \text{O-GPLRC}, \\ \left(1 - \frac{2z}{h} \right) W_{GPL}^{*} & \frac{-h}{2} \le z \le \frac{h}{2} & \text{V-GPLRC}, \\ \left(1 + \frac{2z}{h} \right) W_{GPL}^{*} & \frac{-h}{2} \le z \le \frac{h}{2} & \text{A-GPLRC}, \end{cases}$$
(1.12)

trong đó: W_{GPL}^* là tổng tỷ phần khối lượng của GPL trong FG-GPLRC.

Hệ số Poisson v(z) và hệ số giãn nở nhiệt $\alpha(z)$ của FG-GPLRC được xác định theo quy tắc hỗn hợp như sau:

$$\nu(z) = \nu_m \left[1 - V_{GPL}(z) \right] + \nu_{GPL} V_{GPL}(z),$$

$$\alpha(z) = \alpha_m \left[1 - V_{GPL}(z) \right] + \alpha_{GPL} V_{GPL}(z).$$
(1.13)

Trong nghiên cứu của luận án các thông số của vật liệu thành phần gồm GPL và kim loại Đồng được sử dụng trong Bảng 1.2.

GPL	E_{GPL}	v_{GPL}	$\rho_{\textit{GPL}}$	α_{GPL}	a_{GPL}	$b_{\scriptscriptstyle GPL}$	t _{GPL}
	(GPa)		(kg/m^3)	(×10 ⁻⁶ /K)	(µm)	(µm)	(<i>n</i> m)
	1010	0.186	1062.5	5	2.5	1.5	1.5
Kim loại Đồng	E_m	v _m	ρ _m	α_m			
	(GPa)		(kg/m^3)	(×10 ⁻⁶ /K)			
	130	0.34	8960	17			

Bảng 1.2. Thông số vật liệu của GPL và nền kim loại Đồng [132]

1.3.4. FG-GPLRC rỗng

Trong nghiên cứu của luận án, FG-GPLRC rỗng, được ký hiệu là GF3D, có tỷ phần khối lượng của GPL phân bố đều theo quy luật UD-GPLRC. Tỷ phần thể tích rỗng thay đổi dọc theo chiều dày kết cấu theo ba loại như sau (Hình 1.8):

- Loại GF3D-U: tỷ phần thể tích rỗng phân bố đều theo chiều dày kết cấu.

- Loại GF3D-O: tỷ phần thể tích rỗng phân bố không đều theo chiều dày kết cấu, lớn nhất ở lớp giữa và bằng 0 ở lớp trên cùng và lớp dưới cùng.

- Loại GF3D-X: tỷ phần thể tích rỗng phân bố không đều theo chiều dày kết cấu, lớn nhất ở lớp trên cùng và lớp dưới cùng, bằng 0 ở lớp giữa.



Hình 1.8. Các loại phân bố tỷ phần thể tích rỗng của FG-GPLRC rỗng

Mô đun Young E(z), khối lượng riêng $\rho(z)$, hệ số Poisson $\nu(z)$ và hệ số giãn nở nhiệt $\alpha(z)$ của FG-GPLRC rỗng được xác định tương ứng với từng loại phân bố tỷ phần thể tích rỗng như sau:

$$E(z) = \begin{cases} E^* \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right], & \text{GF3D-O} \\ E^* \left\{ 1 - e_x \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \right\}, & \text{GF3D-X} \\ E^* e_U, & \text{GF3D-U} \end{cases}$$
(1.14)

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho^* \left[1 - \upsilon_O \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right], & \text{GF3D-O} \\ \rho^* \left\{ 1 - \upsilon_X \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \right\}, & \text{GF3D-X} \\ \rho^* \upsilon_U, & \text{GF3D-U} \end{cases}$$
(1.15)

$$\begin{cases} v(z) = v^*, \\ \alpha(z) = \alpha^*, \end{cases}$$
(1.16)

trong đó: E^* , ρ^* , v^* và α^* : lần lượt biểu thị mô đun đàn hồi Young, khối lượng riêng, hệ số Poisson và hệ số giãn nở nhiệt của FG-GPLRC; e_0 , e_X , e_U : lần lượt là các độ rỗng tương ứng với ba loại phân bố tỷ phần thể tích rỗng GF3D-O, GF3D-X và GF3D-U; υ_0 , υ_X , υ_U : lần lượt là các hệ số khối lượng riêng tương ứng với ba loại phân bố tỷ phần thể tích rỗng GF3D-O, GF3D-X và GF3D-U. E^* được xác định dựa trên mô hình Halpin-Tsai mở rộng bằng công thức (1.8) tương ứng với quy luật phân bố UD-GPLRC. Các giá trị v^* và α^* được xác định bằng công thức (1.13).

Phương trình đại diện cho các tính chất cơ học của FG-GPLRC rỗng [87, 95, 130] là:

$$\frac{E(z)}{E^*} = \left[\frac{\rho(z)}{\rho^*}\right]^{2.73}$$
(1.17)

Thay thế các biểu thức của E(z) và $\rho(z)$ từ các phương trình (1.14) và (1.15) vào phương trình (1.17) thu được phương trình biểu thị mối quan hệ giữa độ rỗng và hệ số khối lượng riêng:

$$\begin{cases} 2.7\sqrt[3]{1-e_0}\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) = 1 - \upsilon_0\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right), & \text{GF3D-O} \\ 2.7\sqrt[3]{1-e_x}\left[1-\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right] = 1 - \upsilon_x\left[1-\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right], & \text{GF3D-X} \\ 2.7\sqrt[3]{e_U} = \upsilon_U, & \text{GF3D-U} \end{cases}$$

$$(1.18)$$

Do điều kiện khối lượng của các kết cấu FG-GPLRC rỗng đối với ba loại phân bố tỷ phần thể tích rỗng khác nhau (GF3D-O, GF3D-X, GF3D-U) là bằng nhau nên ta thu được phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các độ rỗng là:

$$\int_{0}^{h/2} 2.73 \sqrt{1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} dz = \int_{0}^{h/2} 2.73 \sqrt{1 - e_X \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]} dz = \int_{0}^{h/2} 2.73 \sqrt{e_U} dz. \quad (1.19)$$

Từ phương trình (1.19), các giá trị của độ rỗng e_X và e_U được xác định tương ứng với giá trị độ rỗng e_O cho trước thể hiện ở Bảng 1.3.

-		
e_{O}	e_{X}	$e_{_U}$
0.1	0.1734	0.9360
0.2	0.3426	0.8713
0.3	0.5065	0.8058
0.4	0.6637	0.7391
0.5	0.8112	0.6711
0.6	0.9432	0.6012

Bảng 1.3. Tương quan giữa các loại độ rỗng khác nhau

1.3.5. Sandwich FG-GPLRC lõi rõng

Trong nghiên cứu của luận án, vật liệu sandwich FG-GPLRC lõi rỗng được cấu tạo bởi lớp phủ trên và dưới bằng FG-GPLRC, có vật liệu nền là kim loại Đồng.

Để đảm bảo tính liên tục của vật liệu, lớp lõi rỗng cũng bằng kim loại Đồng với tỷ phần thể tích rỗng biến thiên dọc theo chiều dày của lớp lõi. Độ dày lớp phủ trên và lớp phủ dưới bằng nhau là h_{fs} và độ dày lớp lõi rỗng là h_{pc} (Hình 1.9).

Đối với lớp lõi rỗng, tỷ phần thể tích rỗng $V_p(z)$ được xác định theo công thức (1.6), mô đun đàn hồi Young $E_{pc}(z)$ và hệ số giãn nở nhiệt $\alpha_{pc}(z)$ xác định theo

công thức (1.7) tương ứng với $-\frac{h_{pc}}{2} < z < \frac{h_{pc}}{2}$. Hệ số Poisson của lõi rỗng được coi là không đổi $v_{pc} = v_m$.



Hình 1.9. Năm loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng

Đối với các lớp phủ FG-GPLRC, mô đun đàn hồi Young $E_{fs}(z)$ được xác định theo công thức (1.8). Trong đó, tỷ phần khối lượng của GPL $W_{GPL}(z)$ được xác định tương ứng với 5 loại phân bố GPL của lớp phủ trên và 5 loại phân bố GPL của lớp phủ dưới như sau:

+) Lớp phủ bên trên

- Loại UD-GPLRC:
$$W_{GPL}(z) = W_{GPL}^{*}$$
 (1.20)

- Loại X-GPLRC:
$$W_{GPL}(z) = \left(\left| \frac{8z + 4h}{h - h_{pc}} - 2 \right| \right) W_{GPL}^*, \quad \frac{-h}{2} \le z \le \frac{-h_{pc}}{2}$$
(1.21)

- Loại O-GPLRC:
$$W_{GPL}(z) = \left(2 - \left|\frac{8z + 4h}{h - h_{pc}} - 2\right|\right) W_{GPL}^*, \quad \frac{-h}{2} \le z \le \frac{-h_{pc}}{2} \quad (1.22)$$

- Loại V-GPLRC:
$$W_{GPL}(z) = \left(\frac{4z + 2h_c}{h_{pc} - h}\right) W_{GPL}^*, \quad \frac{-h}{2} \le z \le \frac{-h_{pc}}{2}$$
 (1.23)

- Loại A-GPLRC:
$$W_{GPL}(z) = \left(\frac{4z+2h}{h-h_{pc}}\right) W_{GPL}^*, \quad \frac{-h}{2} \le z \le \frac{-h_{pc}}{2}$$
 (1.24)

+) Lớp phủ bên dưới

- Loại UD-GPLRC:
$$W_{GPL}(z) = W_{GPL}^*$$
 (1.25)

- Loại X-GPLRC:
$$W_{GPL}(z) = \left(\left| \frac{8z - 4h}{h - h_{pc}} + 2 \right| \right) W_{GPL}^*, \quad \frac{h_{pc}}{2} \le z \le \frac{h}{2}$$
 (1.26)

- Loại O-GPLRC:
$$W_{GPL}(z) = \left(2 - \left|\frac{8z - 4h}{h - h_{pc}} + 2\right|\right) W_{GPL}^*, \quad \frac{h_{pc}}{2} \le z \le \frac{h}{2}$$
(1.27)

- Loại V-GPLRC:
$$W_{GPL}(z) = \left(\frac{2h_{pc} - 4z}{h_{pc} - h}\right) W_{GPL}^*, \quad \frac{h_{pc}}{2} \le z \le \frac{h}{2}$$
 (1.28)

- Loại A-GPLRC:
$$W_{GPL}(z) = \left(\frac{2h-4z}{h-h_{pc}}\right) W_{GPL}^*, \quad \frac{h_{pc}}{2} \le z \le \frac{h}{2}$$
 (1.29)

trong đó W_{GPL}^* là tổng tỷ phần khối lượng của GPL trong mỗi lớp phủ FG-GPLRC. Hệ số Poisson $v_{fs}(z)$ và hệ số giãn nở nhiệt $\alpha_{fs}(z)$ của các lớp phủ được xác định theo công thức (1.13).

Với các loại phân bố GPL của hai lớp phủ, năm loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng thu được là: X-PC-X, O-PC-O, UD-PC-UD, V-PC-A, A-PC-V như thể hiện trên Hình 1.9.

1.4. Những kết quả đã đạt được trong nước và quốc tế và những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

1.4.1. Những kết quả đã đạt được trong nước và quốc tế

Thông qua các kết quả nghiên cứu trong và ngoài nước về các kết cấu tấm vỏ FGM và FG-GPLRC loại đặc thông thường, loại rỗng và loại sandwich lõi rỗng trong những năm vừa qua, có thể thấy được những kết quả chính như sau:

1. Các kết cấu tấm vỏ thông thường bao gồm: tấm, panel trụ, vỏ thoải hai độ cong, vỏ trụ, vỏ trống bằng FGM và FG-GPLRC (loại thông thường, loại rỗng và loại sandwich lõi rỗng) đến nay đã được nghiên cứu tương đối toàn diện về ổn định tĩnh tuyến tính và phi tuyến dưới tác động của tải trọng cơ, nhiệt, và cơ nhiệt kết hợp, cũng như ổn định động và dao động tuyến tính và phi tuyến. Với đa dạng các phương pháp và lý thuyết được áp dụng để phân tích những vấn đề này.

2. Đã có nhiều nghiên cứu về bài toán ổn định tĩnh của chỏm cầu thoải bằng các loại FGM biến dạng đối xứng trục theo lý thuyết vỏ cổ điển và FSDT. Tuy nhiên, số lượng nghiên cứu về FG-GPLRC trong lĩnh vực này vẫn còn hạn chế.

3. Việc nghiên cứu kết cấu chỏm cầu thoải sử dụng FGM và FG-GPLRC theo HSDT vẫn chưa được quan tâm đầy đủ và còn rất ít tài liệu đề cập đến.

4. Đặc biệt, chưa có nghiên cứu nào về kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp gồm chỏm parabol, chỏm sin và chỏm ellip, bằng các loại FGM và FG-GPLRC.

1.4.2. Xác định mục tiêu cần tiếp tục nghiên cứu

Vật liệu FGM và FG-GPLRC có tiềm năng ứng dụng lớn trong chế tạo các kết cấu tiên tiến cho ngành xây dựng. Tuy nhiên, để tối ưu hóa việc tính toán, thiết kế, thi công cũng như bảo trì và bảo dưỡng các kết cấu này, cần có sự hiểu biết sâu rộng hơn về quy luật ứng xử cơ học của chúng. Điều này đặt ra yêu cầu cấp thiết đối với các nghiên cứu khoa học nhằm phát triển các lý thuyết và phương pháp tiếp cận đáng tin cậy để dự đoán khả năng chịu tải của kết cấu sử dụng vật liệu FGM và FG-GPLRC.

Trong kỹ thuật xây dựng, tính ổn định của kết cấu là một yếu tố quan trọng, quyết định đến khả năng làm việc an toàn của công trình. Hai vấn đề chính trong bài toán ổn định bao gồm xác định giá trị tải trọng tới hạn làm cho kết cấu bắt đầu mất ổn định và phân tích ứng xử sau mất ổn định của kết cấu để đánh giá khả năng chịu tải khi tải trọng vượt quá giá trị tải tới hạn. Ngoài ra, nghiên cứu về ổn định còn hướng tới mục tiêu phân tích ảnh hưởng của các yếu tố như: kích thước hình học kết cấu, đặc tính cơ học của vật liệu, hệ số nền đàn hồi, khuyết tật hình dáng kết cấu,... đến giá trị tải tới hạn và khả năng chịu tải sau khi mất ổn định của kết cấu.

Tổng quan nghiên cứu lý thuyết về kết cấu tấm vỏ FGM và FG-GPLRC cho thấy vẫn còn nhiều khoảng trống trong phân tích các kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn. Số lượng nghiên cứu và tài liệu về vấn đề này còn hạn chế, đặc biệt là các nghiên cứu sử dụng HSDT, do gặp nhiều khó khăn về mặt toán học.

Xuất phát từ thực tế đó, luận án đặt ra mục tiêu giải quyết các bài toán phân tích ổn định phi tuyến của kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn FGM và FG-GPLRC bằng các lý thuyết, phương pháp và các cách tiếp cận mới để góp phần gia tăng các hiểu biết trong nghiên cứu loại kết cấu này. Cụ thể, luận án tập trung giải quyết các vấn đề sau:

1. Tiếp cận theo chuyển vị phân tích ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu vỏ chỏm thoải có độ cong phức tạp (chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip) và tấm tròn bằng vật liệu FG-GPLRC rỗng và sandwich FG-GPLPC lõi rỗng theo FSDT. Sử dụng phương pháp Galerkin với dạng nghiệm lượng giác để giải bài toán. Độ cong phức tạp của kết cấu kết hợp với dạng nghiệm lượng giác làm cho bài toán trở nên phức tạp nên đến nay vẫn chưa có lời giải.

2. Tiếp cận theo chuyển vị phân tích ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn bằng vật liệu FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng theo R3SDT. Sử dụng phương pháp năng lượng Ritz với dạng nghiệm đa thức để giải bài toán. R3SDT giúp nâng cao độ chính xác nhưng cũng làm cho bài toán trở nên phức tạp nên đến nay vẫn chưa có lời giải.

3. Tiếp cận theo hàm ứng suất phân tích ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC rỗng theo FSDT. Sử dụng phương pháp năng lượng Ritz với dạng nghiệm đa thức để giải bài toán. Vật liệu FG-GPLRC rỗng có hệ số Poisson thay đổi làm bài toán trở nên phức tạp do gặp khó khăn trong việc xác định hàm ứng suất nên đến nay vẫn chưa có lời giải.

Chương 2. ÔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA KẾT CẦU CHỔM THOẢI CÓ ĐỘ CONG PHỨC TẠP VÀ TẤM TRÒN BẰNG FG-GPLRC RÕNG VÀ SANDWICH FG-GPLRC LÕI RÕNG THEO FSDT VÀ PHƯƠNG PHÁP GALERKIN – TIẾP CẬN THEO CHUYỂN VỊ

Trong chương này, luận án xem xét bài toán ổn định phi tuyến của kết cấu chỏm thoải và tấm tròn với các độ cong phức tạp khác nhau, bao gồm chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip. Các kết cấu này được chế tạo từ hai loại vật liệu tiên tiến: FG-GPLRC rỗng và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng. Các kết cấu chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip mang lại sự mềm mại hơn về mặt kiến trúc so với chỏm cầu nhưng cũng đặt ra nhiều thách thức về mặt toán học. Hiện nay, chưa có nghiên cứu nào công bố về ổn định phi tuyến của các kết cấu này.

Chương này đề xuất một phương pháp tiếp cân giải tích để nghiên cứu ổn đinh phi tuyến của các kết cấu chỏm thoải có đô cong phức tạp và tấm tròn, áp dung hai loai vât liêu tiên tiến gồm: FG-GPLRC rỗng và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng. Kết cấu được xem xét với điều kiện biên chu tuyến bị ngàm cố định, chịu tải áp lực ngoài, tải nhiệt và tải cơ nhiệt kết hợp. Mô hình nền đàn hồi phi tuyến cũng được tích hợp vào hệ phương trình để mô tả chính xác hơn sự tương tác giữa kết cấu và nền đàn hồi. Bằng tiếp cận theo chuyển vị, các phương trình chủ đạo được thiết lập dựa trên FSDT có kể đến tính phi tuyến hình học theo nghĩa von Kármán. Dạng nghiệm của các thành phần chuyển vị, góc xoay và độ không hoàn hảo của kết cấu được biểu diễn dưới dạng hàm lượng giác cho phép xem xét đồng thời nhiều mode mất ổn định đối xứng trục khác nhau, nhờ đó nâng cao độ tin cậy của phương pháp. Phương pháp Galerkin được áp dụng để thu được hệ phương trình cân bằng dưới dạng đại số phi tuyến, từ đó xác định liên hệ phi tuyến giữa tải trọng và độ võng thông qua các biến đổi toán học. Các biểu thức tải nhiệt tới hạn của tấm tròn, biểu tức quan hệ của tải áp lực ngoài và tải nhiệt với độ võng sau mất ổn định của kết cấu chỏm thoải và tấm tròn có thể thu được một cách tường minh. Các khảo sát số được tiến hành để đánh giá ảnh hưởng của thông số hình học và vật liệu, hệ số nền và nhiệt độ môi trường đến tải nhiệt tới hạn của tấm tròn và khả năng chịu tải sau mất ổn định của kết cấu chỏm thoải và tấm tròn. Dựa trên các khảo sát này, các thảo luận và nhận xét có ý nghĩa được thực hiện môt cách chi tiết.

Nội dung chính của chương này đã được công bố trong 02 bài báo trên các tạp chí quốc tế ISI (SCIE) và 01 bài báo trên tạp chí Cơ học Việt Nam (Bài báo số 1, 2 và 3 trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả liên quan đến luận án).

2.1. Thiết lập các phương trình chủ đạo theo FSDT cho kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn

2.1.1. Mô hình kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn

Mô hình của kết chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn với điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến được thể hiện trong Hình 2.1. Kết cấu tương tác với nền được mô hình hóa bằng mô hình nền phi tuyến ba hệ số gồm hệ số nền Winkler K_1 , hệ số nền Pasternak K_2 và hệ số nền phi tuyến K_3 có thể dương hoặc âm tương ứng với nền hóa cứng và nền hóa mềm. Các thông số hình học của kết cấu bao gồm: độ dày h, độ nâng lớn nhất tại đỉnh của chỏm H, bán kính đáy a và bán kính cong chính R. Các chỏm thoải có độ nâng H nhỏ hơn nhiều so với bán kính đáy a để phù hợp với giả thiết chỏm có độ cong thoải.

Áp dụng hệ tọa độ cực (φ, θ, z) được đặt ở mặt giữa của kết cấu. Trong đó, zthể hiện tọa độ theo phương vuông góc với mặt giữa và có chiều dương hướng vào tâm; θ thể hiện tọa độ theo hướng chu vi và φ thể hiện tọa độ theo hướng kinh tuyến. Do giả thiết độ cong thoải nên các phép tính gần đúng $\cos \varphi \approx 1$ và $Rd\varphi \approx dr$ được áp dụng. Biến số φ được thể hiện thông qua biến số mới $r = R \sin \varphi$ thể hiện tọa độ theo hướng bán kính của chỏm. Từ đó, hệ tọa độ (r, θ, z) được sử dụng thay thế nhằm đơn giản hóa quá trình tính toán.

Kết cấu chỏm thoải và tấm tròn được giả thiết có biến dạng đối xứng trục. Các tải trọng được xem xét gồm: tải cơ là tải áp lực ngoài q phân bố đều trên bề mặt ngoài và tải nhiệt ΔT phân bố đều trong toàn kết cấu. Các phương trình lý thuyết và các phương trình quan hệ được thiết lập cho trường hợp kết cấu chỏm thoải có độ nâng H, kết quả tương ứng của tấm tròn thu được khi bán kính cong chính $R \rightarrow \infty$, và do đó H = 0.



Hình 2.1. Mô hình kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn

Độ nâng của mặt giữa kết cấu chỏm thoải được thể hiện bằng các hàm số y = y(r) tương ứng với các chỏm cầu y_c , chỏm parabol y_p , chỏm sin y_{sin} và chỏm elip y_{elip} . Bán kính cong chính của các chỏm cầu R_c , chỏm parabol R_p , chỏm sin R_{sin} và chỏm elip R_{elip} được xác định tương ứng từ hàm độ nâng của chúng như sau:

Đối với chỏm cầu

$$y_c = (H - R_c) + \sqrt{R_c^2 - r^2}; \quad R_c = \frac{H^2 + a^2}{2H}$$
 (2.1)

- Đối với chỏm parabol

$$y_p = -\frac{Hr^2}{a^2} + H; \quad R_p = \frac{a^2}{2H} \left(1 + \frac{4H^2r^2}{a^4}\right)^{\frac{3}{2}}$$
 (2.2)

- Đối với chỏm sin

$$y_{\sin} = H \cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right);$$

$$R_{\sin} = \frac{4a^2}{H\pi^2} \frac{\left[\frac{\pi^2 H^2}{4a^2} \sin^2\left(\frac{\pi r}{2a}\right) + 1\right]^{\frac{3}{2}}}{\cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right)}$$
(2.3)

- Đối với chỏm elip

$$y_{elip} = \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)}H}{a}; \quad R_{elip} = a^2 H^2 \left[\frac{r^2}{a^4} + \frac{H\left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}\right)^2}{H^4}\right]^{\frac{3}{2}}$$
(2.4)

So sánh tọa độ hình học của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip được quan sát trong Hình 2.2.



Hình 2.2. Hình dạng độ cong hình học của các chỏm thoải khác nhau

2.1.2. Thiết lập các phương trình chủ đạo theo FSDT

Bài toán nghiên cứu vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi, giả thiết các thành phần biến dạng nhỏ đảm bảo liên hệ giữa ứng suất và biến dạng là tuyến tính tuân theo định luật Hooke. Các thành phần phi tuyến hình học theo von Kármán được xét đến phù hợp với giả thiết độ võng lớn. Sử dụng FSDT để xây dựng các phương trình chủ đạo về ứng xử ổn định và sau mất ổn định phi tuyến của kết cấu vỏ chỏm thoải có độ cong phức tạp chịu tải áp lực ngoài và tải nhiệt tăng đều trong toàn kết cấu.

Phương trình quan hệ biến dạng – chuyển vị

Xét một điểm bất kỳ có tọa độ z (cách mặt giữa của kết cấu một khoảng bằng z), gọi $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ lần lượt là các thành phần chuyển vị tại điểm này theo các hướng của tọa độ r, θ, z . Với giả định ban đầu biến dạng đối xứng qua trục của kết cấu chỏm thoải, phương trình quan hệ giữa các chuyển vị ($\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$) với các thành phần chuyển vị tương ứng (u, v, w) của điểm thuộc mặt giữa là [125]:

$$\overline{u}(r,z) = u(r) + z\psi(r), \quad \overline{v}(r,z) = 0, \quad \overline{w}(r,z) = w(r) + w^{*}(r), \quad (2.5)$$

trong đó: $\psi(r)$ và $w^*(r)$ tương ứng là góc quay pháp tuyến của mặt giữa và hàm mô tả độ võng không hoàn hảo ban đầu của kết cấu.

Theo FSDT, phương trình quan hệ giữa các thành phần biến dạng tại điểm bất kỳ có tọa độ z với các thành phần biến dạng tương ứng của điểm ở mặt giữa là:

$$\begin{cases} \varepsilon_r \\ \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon_r^0 + z\chi_r \\ \varepsilon_{\theta}^0 + z\chi_{\theta} \\ \psi + w_{,r} \end{cases}, \qquad (2.6)$$

trong đó: ε_r^0 , ε_{θ}^0 lần lượt là các biến dạng theo phương kinh tuyến và theo phương vĩ tuyến tại mặt giữa; χ_r , χ_{θ} lần lượt là các thành phần độ cong theo phương kinh tuyến và theo phương vĩ tuyến tại mặt giữa, được xác định như sau:

- Phương trình quan hệ ứng suất – biến dạng

Áp dụng định luật Hooke cho kết cấu chỏm thoải chịu tác dụng của tải áp lực ngoài phân bố đều kết hợp với tải nhiệt tăng đều như sau:

$$\begin{cases} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{cases} - \begin{cases} \alpha(z)\Delta T \\ \alpha(z)\Delta T \end{cases} \}, \quad \sigma_{rz} = Q_{44}\varepsilon_{rz.}$$
(2.8)

trong đó ΔT là độ tăng nhiệt so với nhiệt độ phòng không có ứng suất nhiệt của kết cấu và Q_{ij} là độ cứng rút gọn của kết cấu được xác định như sau:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - [v(z)]^2}, \quad Q_{12} = \frac{E(z)v(z)}{1 - [v(z)]^2},$$

$$Q_{44} = \frac{E(z)}{2[1 + v(z)]}.$$
(2.9)

- Phương trình lực giãn, mô men và lực cắt

Các nội lực gồm lực giãn, mômen và lực cắt của kết cấu được tính như sau:

$$(N_{r}, M_{r}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) \sigma_{r} dz,$$

$$(N_{\theta}, M_{\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z,) \sigma_{\theta} dz,$$

$$Q_{r} = K_{s} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz.$$
(2.10)

Thế phương trình (2.6) vào phương trình (2.8), sau đó thế các phương trình kết quả vào phương trình (2.10) thu được kết quả dưới dạng như sau:

$$\begin{cases} N_{r} \\ N_{\theta} \\ M_{r} \\ M_{\theta} \\ Q_{r} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & B_{12} & B_{22} & 0 \\ B_{11} & B_{12} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{s}H_{44} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{r}^{0} \\ \varepsilon_{\theta}^{0} \\ \chi_{r} \\ \chi_{\theta} \\ \psi + w_{r} \end{cases} - \begin{cases} \Phi_{1} \\ \Phi_{1} \\ \Phi_{2} \\ \Phi_{2} \\ 0 \end{cases} \Delta T$$
(2.11)

trong đó hệ số hiệu chỉnh trượt theo FSDT được chọn theo giá trị phổ biến $K_s = 5 / 6$, A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} lần lượt là các độ cứng giãn, độ cứng kết hợp và độ cứng uốn của kết cấu:

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1, z, z^2\right) Q_{ij} dz \text{ với } ij = 11, 12, 22, \qquad (2.12)$$

$$H_{44} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} dz, \quad \Phi_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z) dz, \quad \Phi_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z) z dz \quad (2.13)$$

- Các phương trình cân bằng của kết cấu

Các phương trình cân bằng của kết cấu chỏm thoải theo FSDT có xét đến tương tác với nền phi tuyến ba hệ số được áp dụng như sau:

$$(rN_{r})_{,r} - N_{\theta} = 0,$$

$$(rM_{r})_{,r} - M_{\theta} - Q_{r}r = 0,$$

$$(rQ_{r})_{,r} + \left[N_{r}\left(w_{,r} + w_{,r}^{*}\right)r\right]_{,r} + \left(N_{\theta} + N_{r}\right)\frac{r}{R}$$

$$+ \left[q - K_{1}w + K_{2}\left(w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r}\right) - K_{3}w^{3}\right]r = 0,$$
(2.14)

Các phương trình cân bằng (2.14) được viết lại thông qua ba ẩn số hàm số u, ψ, w bằng cách kết hợp với các phương trình (2.7) và (2.11), dẫn đến:

$$\begin{split} &L_{1} = \left(rw_{r}w_{rr} + w_{rr}w_{r}^{*}r + u_{r} + w_{r}w_{rr}^{*}r + -\frac{w}{R} + \frac{w_{r}^{2}}{2} \\ &- \frac{w_{r}}{R}r + w_{r}w_{r}^{*} + u_{rr}r \right) A_{11} - \left(\frac{rw_{r}}{R} + \frac{w_{r}^{2}}{2} + w_{r}w_{r}^{*} \right) A_{12} \end{split}$$
(2.15)
 $+ \left(\frac{w}{R} - \frac{u}{r} \right) A_{22} + \left(\psi_{r} + \psi_{rr}r \right) B_{11} - \frac{B_{22}\psi}{r} = 0, \\ L_{2} = \left(u_{r} + w_{r}w_{rr}r + w_{rr}w_{r}^{*}r + w_{r}w_{rr}r + \frac{w_{r}^{2}}{2} - \frac{w_{r}}{R}r \right) - \frac{w_{r}}{R}r + u_{r}r + w_{r}w_{r}^{*} \right) B_{11} - \left(\frac{w_{r}^{2}}{2} + \frac{w_{r}}{R}r + w_{r}w_{r}^{*} \right) B_{12} \qquad (2.16) \\ + \left(\frac{w}{R} - \frac{u}{r} \right) B_{22} + \left(\psi_{rr}r + \psi_{r} \right) D_{11} - \frac{\psi}{r} D_{22} - \left(w_{r}r + \psi r \right) K_{s} H_{44} = 0, \\ L_{3} = \left[-\frac{w}{R} (w_{rr} + w_{rr}^{*})r + 3w_{r}w_{rr}w_{r}^{*}r + 2w_{r}w_{r}^{*}w_{r}^{*}r + \frac{w_{r}^{*}}{2} \right] + w_{r}w_{rr}^{*}r + \frac{W_{r}^{*}}{R^{2}} \left(w_{r} + w_{r}^{*} \right) r + u_{r}\left(w_{rr} + \frac{1}{R} + w_{rr}^{*} \right) r \\ + u_{rr}\left(w_{r} + w_{r}^{*} \right) r + w_{rr}w_{r}^{*}r + \frac{3}{2}w_{r}^{2} \left(w_{rr} + w_{rr}^{*} \right) r - \frac{w}{R^{2}}r \\ - \frac{w_{r}^{2}}{2R}r + u_{r}\left(w_{r} + w_{r}^{*} \right) - \frac{w}{R} \left(w_{rr} + w_{rr}^{*} \right) r + \frac{1}{R}r - \frac{w}{R^{2}}r \\ - \frac{w_{r}^{2}}{2R}r - \frac{w}{R} \left(w_{r} + w_{r}^{*} \right) - \frac{w}{R} \left(w_{rr} + w_{rr}^{*} \right) r + \frac{1}{R}r - \frac{w}{R^{2}}r \\ - \frac{w_{r}^{2}}{2R}r - \frac{w}{R} \left(w_{r} + w_{r}^{*} \right) - \frac{w}{R} \left(w_{rr} + w_{rr}^{*} \right) r + \psi_{rr} \left(w_{rr} + w_{r}^{*} \right) A_{12} \\ + \left(\frac{u}{R} - \frac{w}{R^{2}}r \right) A_{22} + \left[\frac{\psi_{r}}{R}r + \psi_{r} \left(w_{rr} + w_{rr}^{*} \right) r + \psi_{rr} \left(w_{r} + w_{r}^{*} \right) \right] B_{12} \\ + \left(\frac{u}{R} - \frac{w}{R^{2}}r \right) A_{22} + \left[\frac{\psi_{r}}{R}r + \psi_{r} \left(w_{rr} + w_{rr}^{*} \right) + \frac{\psi}{R} + \psi_{r} \left(w_{r} + w_{r}^{*} \right) \right] B_{12} \\ + \left(\frac{u}{R} - \frac{w}{R^{2}}r \right) A_{22} + \left[\frac{\psi_{r}}{R}r + \psi_{r} \left(w_{rr} + w_{rr}^{*} \right) + \frac{\psi}{R} + \psi_{r} \left(w_{r} + w_{r}^{*} \right) \right] B_{12} \\ + \left(\frac{u}{R} - \frac{w}{R^{2}}r \right) A_{22} + \left[\frac{w_{r}}{R}r + \psi_{r} \left(w_{rr} + w_{rr}^{*} \right) + \frac{\psi}{R} + \psi_{r} \left(w_{r} + w_{r}^{*} \right) \right] B_{12} \\ + \left(\frac{u}{R} - \frac{w}{R^{2}}r \right) A_{12} + \left[\frac{w_{r}}{R}r + \frac{w}{R}r + \frac{w}{R}r \right] + \frac{w}$

2.2. Dạng nghiệm lượng giác và phương pháp Galerkin

Điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến (tại r = a) và điều kiện biến dạng đối xứng trục áp dụng tại đỉnh (tại r = 0) của kết cấu chỏm thoải được trình bày như sau:

$$\begin{array}{ll} r = 0: & \psi = 0, \ u = 0, \\ r = a: & w = 0, \ \psi = 0, \ u = 0. \end{array}$$
 (2.18)

Dạng nghiệm lượng giác cho các thành phần chuyển vị, góc xoay và độ không hoàn hảo của kết cấu thỏa mãn các điều kiện biên (2.18) được lựa chọn như sau:

$$u = U \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right), \quad \psi = \Psi \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right),$$

$$w = W \left[\cos\left(\frac{m\pi r}{2a}\right)\right]^{2}, \quad w^{*} = W^{*} \left[\cos\left(\frac{m\pi r}{2a}\right)\right]^{2}.$$
(2.19)

trong đó m là số tự nhiên lẻ biểu thị mode mất ổn định của kết cấu theo phương kinh tuyến; U, W, Ψ lần lượt là biên độ của các thành phần chuyển vị u, độ võng w và góc xoay ψ ; W^* là biên độ của hàm độ không hoàn hảo ban đầu w^* .

Thế dạng nghiệm (2.19) vào các phương trình cân bằng (2.15), (2.16) và (2.17) rồi áp dụng phương pháp Galerkin như sau:

$$\int_{0}^{a} \int_{0}^{2\pi} L_1 \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right) d\theta dr = 0, \qquad (2.20)$$

$$\int_{0}^{a} \int_{0}^{2\pi} L_2 \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right) d\theta dr = 0, \qquad (2.21)$$

$$\int_{0}^{a} \int_{0}^{2\pi} L_{3} \left[\cos \left(\frac{m \pi r}{2a} \right) \right]^{2} d\theta dr = 0.$$
 (2.22)

Thực hiện các tích phân (2.20), (2.21) và (2.22) thu được hệ ba phương trình đại số phi tuyến theo ba thành phần biên độ U, W, Ψ đó là:

$$X_{11}W^{2} + X_{12}W + X_{13}WW^{*} + X_{14}U + X_{15}\Psi = 0, \qquad (2.23)$$

$$X_{21}W^{2} + X_{22}W + X_{23}WW^{*} + X_{24}U + X_{25}\Psi = 0, \qquad (2.24)$$

$$X_{31}W^{3} + X_{32}W^{2} + X_{33}W^{2}W^{*} + X_{34}W(W^{*})^{2} + (X_{35}W^{*} + X_{36}U + X_{37}\Psi + X_{38}\Phi_{1}\Delta T + X_{39})W + (X_{310}U + X_{311}\Psi + X_{312}\Phi_{1}\Delta T)W^{*}$$
(2.25)
+ $X_{313}U + X_{314}\Psi + X_{315}\Phi_{1}\Delta T + X_{316}q = 0,$

trong đó:

$$\begin{split} X_{11} &= -\frac{1}{36} \frac{\pi m \left[(-1)^m - 1 \right]}{a} (A_{11} - 3A_{12}), \\ X_{12} &= \int_{0}^{a} \left\{ \frac{\pi m r}{2aR} \left(\sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \right)^2 + \frac{r}{R^2} \sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \left(\cos \left(\frac{\pi m r}{2a} \right) \right)^2 \frac{dR}{dr} \right\} (A_{11} + A_{12}) \\ &+ (A_{22} - A_{11}) \frac{1}{R} \sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \left(\cos \left(\frac{\pi m r}{2a} \right) \right)^2 dr, \\ X_{13} &= -\frac{1}{18} \frac{\pi m}{a} \left\{ A_{11} \left[(-1)^m - 1 \right] + 3 \left[(-1)^{1-m} + 1 \right] A_{12} \right\}, \\ X_{14} &= -\frac{\pi^2 m^2}{4} A_{11} - \int_{0}^{a} \frac{A_{22}}{ar} \left(\sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \right)^2 dr, \\ X_{15} &= -\frac{\pi^2 m^2}{4} B_{11} - \int_{0}^{a} \frac{B_{22}}{r} \left(\sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \right)^2 dr, \\ X_{22} &= \frac{m \pi a}{8} K_8 H_{44} + \int_{0}^{a} \left\{ \left[\frac{\pi m r}{2aR} \left(\sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \right)^2 \right]^2 dr, \\ X_{22} &= \frac{m \pi a}{8} K_8 H_{44} + \int_{0}^{a} \left\{ \left[\frac{\pi m r}{2aR} \left(\sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \right)^2 dr, \\ + \sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \left(\cos \left(\frac{\pi m r}{2a} \right) \right)^2 \frac{r}{R^2} \frac{d}{dr} R \right] (B_{11} + B_{12}) \\ &+ \frac{1}{R} (B_{22} - B_{11}) \sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \left(\cos \left(\frac{\pi m r}{2a} \right) \right)^2 \right] dr, \\ X_{23} &= -\frac{1}{18} \frac{\pi m}{a} \left\{ B_{11} \left[(-1)^m - 1 \right] + 3 \left[(-1)^{11m} + 1 \right] B_{12} \right\}, \\ X_{24} &= -\frac{\pi^2 m^2}{4} B_{11} - \int_{0}^{a} \left[\frac{B_{22}}{r} \left(\sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \right)^2 \right] dr, \\ X_{25} &= -\frac{1}{4} \left(\pi^2 m^2 D_{11} + a^2 K_8 H_{44} \right) - \int_{0}^{a} \left[\frac{D_{22}}{r} \left(\sin \left(\frac{\pi m r}{a} \right) \right)^2 \right] dr, \\ X_{31} &= -\frac{\pi^2 m^2}{512a^2} \left[16 \left(\cos \left(\frac{\pi m}{2} \right) \right)^8 - 32 \left(\cos \left(\frac{\pi m}{2} \right) \right)^6 + 4 \left(\cos \left(\frac{\pi m}{2} \right) \right)^6 \right] \\ + 12 \left(\cos \left(\frac{\pi m}{2} \right) \right)^2 + 3\pi^2 m^2 \right] A_{11} - \frac{a^2}{2304\pi^2 m^2} \left[144 \left(\cos \left(\frac{\pi m}{2} \right) \right)^8 \right] X_{31}, \\ + 224 \left(\cos \left(\frac{\pi m}{2} \right) \right)^6 + 420 \left(\cos \left(\frac{\pi m}{2} \right) \right)^4 + 1260 \left(\cos \left(\frac{\pi m}{2} \right) \right)^2 + 315\pi^2 m^2 - 2048 \right] K_3, \end{aligned}$$

$$\begin{split} X_{32} &= -\int_{0}^{a} \frac{\pi m}{a^{2}R^{2}} (A_{11} + A_{12}) \left(\cos\left(\frac{\pi mr}{2a}\right) \right)^{4} \left\{ -\frac{3\pi}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi mr}{2a}\right) \right)^{2} Rmr \\ &+ \frac{a}{2} \sin\left(\frac{\pi mr}{a}\right) \left(r \frac{dR}{dr} - R \right) + \pi mrR \right\} dr, \\ X_{33} &= -\frac{3\pi^{2}m^{2}}{512a^{2}} A_{11} \left[16 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{8} - 32 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{6} \\ &+ 4 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{4} + 12 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{2} + 3\pi^{2}m^{2} \right], \\ X_{34} &= -\frac{m^{2}\pi^{2}}{256a^{2}} A_{11} \left[16 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{8} - 32 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{6} \\ &+ 4 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{4} + 12 \left(\cos\left(\frac{\pi mr}{2}\right) \right)^{2} + 3\pi^{2}m^{2} \right], \\ X_{35} &= -\int_{0}^{a} \frac{\pi m}{a^{2}R^{2}} (A_{11} + A_{12}) \left(\cos\left(\frac{\pi mr}{2a}\right) \right)^{4} \left\{ -\pi mrR \left(\cos\left(\frac{\pi mr}{2a}\right) \right)^{2} \\ &+ \frac{a}{2} \sin\left(\frac{\pi mr}{a}\right) \left(r \frac{dR}{dr} - R \right) + \frac{\pi mrR}{2} \right\} dr, \\ X_{36} &= \frac{\pi m}{9a} A_{11} \left\{ 2 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{6} - 3 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{4} + 1 \right\} \\ &+ \frac{\pi m}{3a} A_{12} \left\{ 4 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{6} - 3 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{4} + 1 \right\} \\ &+ \frac{\pi m}{3a} B_{12} \left\{ 4 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{6} - 3 \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{4} - 1 \right\}, \\ X_{38} &= \frac{1}{16} \left\{ \pi^{2}m^{2} - 4 \left[\left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{4} - \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)^{2} \right] \right\}, \end{split}$$

$$\begin{split} X_{39} &= \frac{m^2 \pi^2 (K_2 + K_8 H_{44}) - a^2 K_1}{4\pi^2 m^2} \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^4 \\ &- \frac{m^2 \pi^2 (K_2 + K_8 H_{44}) + 3a^2 K_1}{4\pi^2 m^2} \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^2 \\ &- \frac{m^4 \pi^4 (K_2 + K_8 H_{44}) + a^2 K_1 (3\pi^2 m^2 - 16)}{16\pi^2 m^2} \\ &- \int_0^a \frac{r(2A_{12} + A_{11} + A_{22})}{R^2} \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m m}{2a} \bigg) \bigg)^4 dr, \\ X_{310} &= \frac{\pi m}{9a} \bigg\{ 2 \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^6 - 3 \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^4 - 1 \bigg\} A_{11} \\ &+ \frac{\pi m}{3a} \bigg\{ 4 \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^6 - 3 \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^4 - 1 \bigg\} B_{12}, \\ X_{311} &= \frac{\pi m}{9a} \bigg\{ 2 \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^6 - 3 \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^4 + 1 \bigg\} B_{11} \\ &+ \frac{\pi m}{3a} \bigg\{ 4 \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^6 - 3 \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^4 - 1 \bigg\} B_{12}, \\ X_{312} &= \frac{1}{16} \bigg\{ \pi^2 m^2 - 4 \bigg[\bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m m}{2} \bigg) \bigg)^4 - \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m m}{2} \bigg) \bigg)^2 \bigg] \bigg\}, \\ X_{313} &= \int_0^a \bigg[\frac{1}{R} (A_{12} + A_{22}) \sin \bigg(\frac{\pi m m}{a} \bigg) + \frac{r \pi m}{aR} (A_{11} + A_{12}) \cos \bigg(\frac{\pi m m}{a} \bigg) \bigg] \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m m}{2a} \bigg) \bigg)^2 dr, \\ X_{314} &= \frac{m \pi a}{8} K_8 H_{44} + \\ &+ \int_0^a \bigg[\frac{\pi m m}{aR} (B_{11} + B_{12}) \cos \bigg(\frac{\pi m m}{a} \bigg) + \frac{1}{R} (B_{12} + B_{22}) \sin \bigg(\frac{\pi m m}{a} \bigg) \bigg] \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m m}{2a} \bigg) \bigg)^2 dr, \\ X_{315} &= - \int_0^a \frac{2r}{R} \bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m m}{2a} \bigg) \bigg)^2 dr \,, \\ X_{316} &= \frac{a^2}{4 \pi^2 m^2} \bigg\{ \pi^2 m^2 + 4 \bigg[\bigg(\cos \bigg(\frac{\pi m}{2} \bigg) \bigg)^2 - 1 \bigg] \bigg\}. \end{split}$$

Tiến hành giải hệ hai phương trình (2.23) và (2.24) thu được các biểu thức của U và Ψ là:

$$U = -\frac{1}{X_{14}X_{25} - X_{15}X_{24}} \Big[(X_{11}X_{25} - X_{15}X_{21})W^{2} + (X_{13}X_{25} - X_{15}X_{23})W^{*}W + (X_{12}X_{25} - X_{15}X_{22})W \Big],$$
(2.26)
$$\Psi = \frac{1}{X_{14}X_{25} - X_{15}X_{24}} \Big[(X_{11}X_{24} - X_{14}X_{21})W^{2} + (X_{13}X_{24} - X_{14}X_{23})W^{*}W + (X_{12}X_{24} - X_{14}X_{22})W \Big].$$

Tiếp theo, thế biểu thức U và Ψ trong (2.26) vào phương trình (2.25) nhận được phương trình kết quả như sau:

$$Y_{1}W^{3} + Y_{2}W^{2} + Y_{3}W^{2}W^{*} + Y_{4}W + Y_{5}W(W^{*})^{2} + Y_{6}WW^{*} + Y_{7}W\Phi_{1}\Delta T$$

+ $Y_{8}\Phi_{1}\Delta TW^{*} + Y_{9}\Phi_{1}\Delta T + Y_{10}q = 0,$ (2.27)

trong đó:

$$\begin{split} Y_{1} &= X_{31} + \frac{\left(X_{11} X_{24} - X_{14} X_{21}\right) X_{37} - \left(X_{11} X_{25} - X_{15} X_{21}\right) X_{36}}{X_{14} X_{25} - X_{15} X_{24}}, \\ Y_{2} &= X_{32} + \frac{\left(X_{12} X_{24} - X_{14} X_{22}\right) X_{37} - \left(X_{12} X_{25} - X_{15} X_{22}\right) X_{36}}{X_{14} X_{25} - X_{15} X_{24}}, \\ &- \frac{X_{313} \left(X_{11} X_{25} - X_{15} X_{21}\right) + X_{314} \left(X_{11} X_{24} - X_{14} X_{21}\right)}{X_{14} X_{25} - X_{15} X_{24}}, \\ Y_{3} &= X_{33} + \frac{\left(X_{13} X_{24} - X_{14} X_{23}\right) X_{37} - \left(X_{13} X_{25} - X_{15} X_{23}\right) X_{36}}{X_{14} X_{25} - X_{15} X_{24}}, \\ &+ \frac{\left(X_{11} X_{24} - X_{14} X_{21}\right) X_{311} - \left(X_{11} X_{25} - X_{15} X_{21}\right) X_{310}}{X_{14} X_{25} - X_{15} X_{24}}, \\ Y_{4} &= X_{39} - \frac{X_{313} \left(X_{12} X_{25} - X_{15} X_{22}\right) + X_{314} \left(X_{12} X_{24} - X_{14} X_{22}\right)}{X_{14} X_{25} - X_{15} X_{24}}, \\ Y_{5} &= X_{34} + \frac{\left(X_{13} X_{24} - X_{14} X_{23}\right) X_{311} - \left(X_{13} X_{25} - X_{15} X_{23}\right) X_{310}}{X_{14} X_{25} - X_{15} X_{24}}, \\ Y_{6} &= X_{35} + \frac{\left(X_{12} X_{24} - X_{14} X_{22}\right) X_{311} - \left(X_{12} X_{25} - X_{15} X_{22}\right) X_{310}}{X_{14} X_{25} - X_{15} X_{24}}, \\ Y_{7} &= X_{38}, \qquad Y_{8} &= X_{312}, \qquad Y_{9} &= X_{315}, \qquad Y_{10} &= X_{316}. \end{split}$$

Phương trình (2.27) thể hiện mối liên hệ giữa tải áp lực ngoài q, tải nhiệt ΔT và biên độ của độ võng W.

Từ phương trình (2.27), lần lượt thu được biểu thức của tải áp lực ngoài q và tải nhiệt tăng đều ΔT như sau:

$$q = -\frac{1}{Y_{10}} \left[Y_1 W^3 + Y_2 W^2 + Y_3 W^2 W^* + Y_4 W + Y_5 W (W^*)^2 + Y_6 W W^* + Y_7 W \Phi_1 \Delta T + Y_8 \Phi_1 \Delta T W^* + Y_9 \Phi_1 \Delta T \right]$$

$$\Delta T = -\frac{1}{\Phi_1 (WY_7 + W^* Y_8 + Y_9)} \left[Y_1 W^3 + Y_2 W^2 + Y_3 W^2 W^* + Y_4 W + Y_5 W (W^*)^2 + Y_6 W W^* + Y_{10} q \right]$$
(2.28)
$$+ Y_5 W (W^*)^2 + Y_6 W W^* + Y_{10} q$$

Biểu thức quan hệ (2.28) và (2.29) được sử dụng để nghiên cứu ứng xử ổn định tĩnh của các kết cấu chỏm thoải. Các phương trình quan hệ tương ứng cho kết cấu tấm tròn thu được bằng cách cho $R \rightarrow \infty$. Theo dạng mất ổn định phân nhánh, tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của kết cấu tấm tròn hoàn hảo $(W^* = 0)$ thu được từ biểu thức (2.29) khi $W \rightarrow 0$ là:

$$\Delta T_{cr} = \frac{-Y_4}{Y_7 \Phi_1}.$$
 (2.30)

Hiện tượng mất ổn định phân nhánh không xảy ra với các kết cấu chỏm thoải.

Luận án sử dụng phần mềm Maple và Excel để thực hiện khảo sát số cho kết cấu chỏm thoải và tấm tròn bằng cách sử dụng các kết quả lý thuyết đã nhận được ở dạng hiển phía trên.

2.3. Nghiên cứu so sánh

Đề khẳng định tính tin cậy của phương pháp nghiên cứu trong luận án, nghiên cứu sinh lựa chọn một số kết quả của các nghiên cứu đã được công bố trước đó bằng các phương pháp khác để tiến hành so sánh với phương pháp mà luận án sử dụng.

Đầu tiên, đối với kết cấu tấm tròn FGM với điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến chịu tải nhiệt tăng đều. Các kết quả tải nhiệt tới hạn của luận án được so sánh tương ứng với kết quả các nghiệm sử dụng tiêu chuẩn cân bằng lân cận của Najafizadeh và Hedayati [82] dựa trên FSDT và các kết quả sử dụng phần tử hữu hạn đẳng hình học của Lộc và cộng sự [77] dựa trên HSDT. Bảng 2.1 cho thấy các kết quả của luận án phù hợp với kết quả của các phương pháp khác với phần lớn các sai số là rất nhỏ, sai số lớn nhất nhận được chỉ là 1.41%.

			h / a		
	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
Najafizadeh và	146.815	94.081	53.029	23.603	5.906
Hedayati [82]	$(0.15\%)^{*}$	(0.34%)	(0.39%)	(0.42%)	(0.44%)
Lộc và cộng sự	144.9953	93.4005	52.8191	23.5719	5.9093
[77]	(1.41%)	(1.07%)	(0.79%)	(0.55%)	(0.38%)
Luận án	147.0435	94.4065	53.2351	23.7019	5.9318

Bảng 2.1. So sánh tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn FGM Al/Al₂O₃

 * Độ lệch giữa kết quả của tác giả khác với kết quả của luận án

Tiếp theo, biên độ của độ võng của các tấm tròn đẳng hướng với điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến chịu tải áp lực ngoài phân bố đều được sử dụng để so sánh với kết quả của Reddy [98] (sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển). Các kết quả phi tuyến của luận án thu được từ biểu thức (2.28) và kết quả tuyến tính của luận án được xác định bằng cách loại bỏ các số hạng phi tuyến trong phương trình này. Kết quả so sánh thể hiện trong Bảng 2.2 cho thấy hầu hết các trường hợp sai số lớn nhất chỉ là hơn 7%. Sai số lớn bất thường (26.07%) chỉ xảy ra với kết quả phi tuyến của luận án so với kết quả tuyến tính của Reddy trong trường hợp độ võng rất lớn, lúc này mô hình tuyến tính không còn đủ độ chính xác nữa dẫn tới sai lệch lớn với mô hình phi tuyến. Rõ ràng, các so sánh này khẳng định độ tin cậy của phương pháp tiếp cận của luận án.

(q = 10kPa, $E = 207.78$ Gpa, $v = 0.34$, $h = 0.01$ m)							
h/a	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08		
Tuyến tính – Reddy [98]	8.212	0.513	3.208×10 ⁻²	6.336×10 ⁻³	2.005×10-3		
Tuyến tính – luận án	8.595	0.538	3.383×10 ⁻²	6.750×10 ⁻³	2.165×10 ⁻³		
	$(4.46\%)^{*}$	(4.65%)	(5.17%)	(6.13%)	(7.39%)		
Phi tuyến – luận án	6.514	0.537	3.383×10 ⁻²	6.750×10 ⁻³	2.165×10 ⁻³		
	(26.07%)	(4.47%)	(5.17%)	(6.13%)	(7.39%)		

Bảng 2.2. So sánh biên độ của độ võng W(mm) của tấm tròn đẳng hướng chịu tải áp lực ngoài phân bố đều

* Độ lệch giữa kết quả của tác giả khác với kết quả của luận án

2.4. Khảo sát số phân tích ổn định phi tuyến kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn bằng FG-GPLRC rỗng và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng

Phần này tiến hành phân tích số để nghiên cứu ứng xử cơ nhiệt sau mất ổn định của các kết cấu: chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin, chỏm elip và tấm tròn. 2.4.1. Kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn FG-GPLRC rỗng





FG-GPLRC rỗng có tỷ phần khối lượng GPL phân bố đều UD-GPLRC với ba loại phân bố tỷ phần thể tích rỗng khác nhau GF3D-O, GF3D-X và GF3D-U. Các tính chất hiệu dụng của FG-GPLRC rỗng được lấy theo mục 1.3.4. Kết cấu có thể là hoàn hảo hoặc không hoàn hảo được phân tích trong mô hình không có nền đàn hồi $(K_1 = 0, K_2 = 0, K_3 = 0)$ với điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến, chịu tải áp lực ngoài phân bố đều kết hợp với tải nhiệt tăng đều theo chiều dày (Hình 2.3).

Hình 2.4 khảo sát các mode mất ổn định m của tấm tròn GF3D-X chịu tải cơ và tải nhiệt. Đối với tải cơ, xu hướng đi lên từ điểm gốc của đường cong sau mất ổn định thu được cho tất cả các mode m và không thể quan sát được điểm phân nhánh. Ngược lại, đối với tải nhiệt trạng thái màng và điểm phân nhánh có thể được quan sát rõ ràng với độ võng có thể võng về phía âm hoặc dương một cách ngẫu nhiên. Ngoài ra, trong tất cả các trường hợp được khảo sát sự mất ổn định dễ dàng xảy ra nhất ở mode m=1 trong cả ứng xử cơ và nhiệt của kết cấu. Do đó, các phân tích tiếp theo chỉ tập trung vào mode mất ổn định m=1 của kết cấu tấm tròn.



Hình 2.4. Khảo sát các mode m mất ổn định cơ và nhiệt của tấm tròn GF3D-X **Bảng 2.3.** Ảnh hưởng của độ rỗng, loại phân bố rỗng, tỷ phần khối lượng GPL đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn FG-GPLRC rỗng hoàn hảo (h = 0.01m, a = 40h, q = 0Mpa, m = 1)

$\begin{array}{c} e_{O} & W_{GPL}^{*} \\ (\%) \end{array}$		GF3D-O	GF3D-X	GF3D-U
	0	33.5996	33.5996	33.5996
0	0.5	34.7558	34.7558	34.7558
0	1	35.8965	35.8964	35.8965
	1.5	37.0219	37.0219	37.0219
	0	35.7084	29.9968	33.5996
0.2	0.5	36.9372	31.0289	34.7558
0.2	1	38.1496	32.0472	35.8965
	1.5	39.3457	33.0519	37.0219
	0	38.5363	25.5434	33.5996
0.4	0.5	39.8625	26.4221	34.7558
0.4	1	41.1710	27.2891	35.8965
	1.5	42.4620	28.1446	37.0219
	0	42.5267	20.3748	33.5996
0.6	0.5	43.9904	21.0756	34.7558
0.0	1	45.4345	21.7670	35.8964
	1.5	46.8593	22.4493	37.0219

Bảng 2.3 cho thấy khi độ rỗng tăng, tải nhiệt tới hạn của tấm tròn tăng đáng kể đối với loại phân bố rỗng GF3D-O nhưng lại giảm đối với loại phân bố rỗng GF3D-X và không đổi đối với loại phân bố rỗng GF3D-U. Tỷ phần khối lượng GPL tăng làm tăng tải nhiệt tới hạn của cả ba loại phân bố rỗng. Kết quả cũng cho thấy với cùng độ rỗng và tỷ phần khối lượng GPL, tải nhiệt tới hạn của loại phân bố rỗng GF3D-O là cao nhất, trong khi GF3D-X thể hiện thấp nhất.



Hình 2.5. Khảo sát các mode m mất ổn định cơ và nhiệt của chỏm thoải có độ cong phức tạp FG-GPLRC rỗng

Ứng xử ổn định cơ và nhiệt của chỏm cầu, chỏm parabol và chỏm sin được khảo sát với các mode mất ổn định m khác nhau trong Hình 2.5. Xu hướng các đường cong sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu và chỏm parabol tương tự được quan sát thấy ở kết cấu tấm tròn trong trường hợp chịu tải cơ (Hình 2.5a, c). Tuy nhiên trong trường hợp tải nhiệt (Hình 2.5b, d) có sự khác biệt so với kết cấu tấm tròn, chỏm

parabol và chỏm sin được khảo sát cho thấy xuất hiện vùng độ võng âm và xu hướng đi lên từ điểm gốc của các đường cong sau mất ổn định. Ngoài ra, mode mất ổn định m=1 được thấy rõ luôn xảy ra đầu tiên, do đó, các nghiên cứu tiếp theo chỉ tập trung vào mode mất ổn định m=1 của kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp.



Hình 2.6. So sánh các đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ và $\Delta T \sim W / h$ của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip FG-GPLRC rỗng

Khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip được so sánh trong Hình 2.6. So sánh khả năng chịu tải cơ của kết cấu ở môi trường nhiệt độ phòng $\Delta T = 0$ K (Hình 2.6a) và ở môi trường nhiệt độ cao $\Delta T = 300$ K (Hình 2.6b) đều cho thấy đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ của chỏm elip là thấp nhất thể hiện khả năng chịu tải yếu nhất và chỏm sin là cao nhất thể hiện khả năng chịu tải tốt nhất. Trong trường hợp môi trường nhiệt độ cao, độ võng nhiệt về phía âm của trục z được quan sát và đường cong của chỏm

sin thấp hơn so với các loại chỏm khác ở vùng độ võng nhỏ. Tuy nhiên, ở vùng độ võng lớn khả năng chịu lực sau mất ổn định của chỏm sin vẫn được thể hiện là tốt nhất. Ngoài ra, hiện tượng snap-through xảy ra trong trường hợp môi trường nhiệt độ cao với tất cả các loại chỏm, ngoại trừ chỏm sin. Trong trường hợp chịu tải nhiệt không có ứng suất trước q = 0MPa (Hình 2.6c) và có ứng suất trước q = 2MPa (Hình 2.6d), có thể quan sát thấy hình dạng đường cong sau mất ổn định gần như tuyến tính và thấy rõ khả năng chịu tải tốt nhất của vỏ hình sin. Do ứng suất trước, độ võng trước dương được thể hiện trong Hình 2.6d.

Đánh giá ảnh hưởng của các loại phân bố tỷ lệ thể tích rỗng đến các đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ của chỏm elip thể hiện trong Hình 2.7 và $\Delta T \sim W / h$ của chỏm parabol được thể hiện trong Hình 2.8. Kết quả cho thấy khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định của loại phân bố GF3D-O là tốt nhất và GF3D-X là thấp nhất. Tuy nhiên, sự khác biệt về khả năng chịu tải cơ giữa các loại phân bố rỗng được thể hiện rõ ràng hơn trong trường hợp tải nhiệt.





Hình 2.7. Ảnh hưởng của loại phân bố rỗng đến ứng xử cơ sau mất ổn định của chỏm elip FG-GPLRC rỗng

Hình 2.8. Ảnh hưởng của loại phân bố rỗng ứng xử nhiệt sau mất ổn định của chỏm parabol FG-GPLRC rỗng

Hình 2.9 cho thấy những ảnh hưởng trái chiều của độ rỗng đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định. Khi độ rỗng tăng lên, khả năng chịu tải cơ của chỏm parabol GF3D-O giảm do mô đun đàn hồi giảm, trong khi khả năng chịu tải nhiệt của chỏm sin GF3D-O tăng nhẹ do hệ số giãn nở nhiệt giảm. Đối với loại phân bố rỗng GF3D-O, khi độ rỗng tăng sẽ làm giảm cả mô đun đàn hồi và hệ số giãn nở nhiệt gây ra hai hiệu ứng trái chiều lên khả năng chịu tải nhiệt của kết cấu. Mô đun đàn hồi giảm làm

giảm khả năng chịu tải nhiệt trong khi hệ số giãn nở nhiệt giảm lại làm tăng khả năng chịu tải nhiệt của kết cấu. Từ kết quả khảo sát cho thấy ảnh hưởng của hệ số giãn nở nhiệt đến khả năng chịu tải nhiệt của kết cấu là lớn hơn so với mô đun đàn hồi.



Hình 2.9. Ảnh hưởng của độ rỗng đến ứng xử cơ của chỏm parabol và nhiệt của chỏm sin GF3D-O sau mất ổn định

Tương tự như các khảo sát trước, tỷ phần khối lượng GPL tăng làm tăng mạnh khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm parabol (Hình 2.10).



Hình 2.10. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến ứng xử cơ của chỏm parabol GF3D-O và nhiệt của chỏm parabol GF3D-X sau mất ổn định

Hình 2.11 cho thấy ảnh hưởng của tỷ số hình học a / h đến xu hướng các đường cong sau mất ổn định tải cơ và tải nhiệt là trái ngược nhau đối với tất cả các trường hợp khảo sát. Khi tỷ số hình học a / h tăng lên, khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định

của chỏm elip GF3D-O và GF3D-X giảm mạnh, trong khi khả năng chịu tải nhiệt sau mất ổn định của chỏm sin GF3D-O và GF3D-X tăng mạnh.



Hình 2.11. Ảnh hưởng của tỷ số a / h đến ứng xử cơ của chỏm elip và nhiệt của chỏm sin GF3D-X và GF3D-O sau mất ổn định





Ånh hưởng của độ không hoàn hảo đến khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định của chỏm parabol GF3D-O trong môi trường nhiệt độ phòng và môi trường nhiệt độ cao được nghiên cứu trong Hình 2.12. Ở vùng độ võng nhỏ, các đường cong sau mất ổn định $q \sim W / h$ thấp hơn với các độ không hoàn hảo lớn hơn và quan sát này bị đảo ngược ở vùng độ võng lớn sau khi chúng đi qua một điểm giao nhau. Độ nâng của đỉnh *H* cũng ảnh hưởng lớn đến khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định của chỏm

sin GF3D-O và GF3D-X trong Hình 2.13. Khả năng chịu tải sau mất ổn định lớn hơn đáng kể khi độ nâng của đỉnh *H* tăng lên.

2.4.2. Kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng

Trong phần này tiến hành phân tích số để nghiên cứu đặc tính mất ổn định cơ nhiệt của các kết cấu chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin, chỏm elip và tấm tròn bằng vật liệu sandwich FG-GPLRC lõi rỗng. Vật liệu sandwich FG-GPLRC lõi rỗng có năm loại cấu trúc khác nhau: UD-PC-UD, X-PC-X, O-PC-O, A-PC-V và V-PC-A. Các tính chất hiệu dụng của sandwich FG-GPLRC lõi rỗng được lấy theo mục 1.3.5.



Hình 2.14. Mô hình kết cấu chỏm thoải và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng

Kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn được đặt nền đàn hồi ba hệ số với điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến (Hình 2.14). Kết cấu được phân tích trong trường hợp là hoàn hảo hoặc không hoàn hảo chịu tải áp lực ngoài phân bố đều kết hợp với tải nhiệt tăng đều theo chiều dày.

Bảng 2.4. Ảnh hưởng của độ rỗng, loại phân bố GPL, tỷ phần khối lượng GPL đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng (h = 0.027m, a = 35h, $W^* = 0$, $K_1 = 8$ MN/m³, $K_2 = 0.2$ MN/m, $K_3 = 0$, m = 1, q = 0MPa, $R = \infty$)

e_0	$W^*_{GPL}(\%)$	X-PC-X	UD-PC-UD	O-PC-O	A-PC-V	V-PC-A
	2	70.8998	69.3236	68.9344	61.9949	77.7184
0.2	4	78.9470	76.5732	76.2760	66.7859	88.1547
0.2	6	86.0654	83.4394	83.0127	72.1132	96.5350
	8	92.4361	89.9208	89.1432	77.3382	103.6819
0.4	2	74.3282	72.5838	72.2656	64.9825	81.4843
	4	82.2274	79.5902	79.4430	69.5500	91.8256
	6	89.3954	86.4576	86.2223	74.8927	100.2779
	8	95.8833	93.0353	92.4654	80.2120	107.5561
	2	77.2841	75.3874	75.1370	67.5560	84.7326
0.6	4	85.0219	82.1499	82.1405	71.9025	94.9546
0.6	6	92.2185	89.0044	88.9429	77.2468	103.4527
	8	98.7993	95.6568	95.2752	82.6407	110.8348
0.8	2	79.6098	77.5883	77.3957	69.5780	87.2906
	4	87.2002	84.1380	84.2424	73.7331	97.3957
	6	94.4113	90.9745	91.0553	79.0723	105.9207
	8	101.0608	97.6814	97.4536	84.5214	113.3796

Có thể quan sát ảnh hưởng của độ rỗng, loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng và tỷ phần khối lượng GPL đến tải nhiệt tới hạn của tấm tròn trong Bảng 2.4. Loại cấu trúc V-PC-A chiếm ưu thế tuyệt đối trong khi cấu trúc A-PC-V thể hiện thấp nhất về giá trị tải nhiệt tới hạn trong 5 loại cấu trúc. Lý do rõ ràng là GPL được đặt càng xa bề mặt giữa thì độ cứng của tấm tròn càng lớn dẫn đến tải nhiệt tới hạn lớn hơn. Ngoài ra, với tất cả năm loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng được xem xét đều cho thấy tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn tăng tỷ lệ thuận với độ rỗng và tỷ phần khối lượng GPL. Độ rỗng tăng sẽ làm độ cứng giảm và cũng làm hệ số giãn nở nhiệt giảm, tác động có xu hướng trái ngược nhau của hai thành phần này lên tải nhiệt tới hạn kết quả tác động là làm tăng giá trị của tải nhiệt tới hạn của tấm. Mặt khác, độ cứng và hệ số giãn nở nhiệt đều tăng khi tỷ phần khối lượng GPL tăng, tuy nhiên, xu hướng thay đổi của tải nhiệt tới hạn ngược lại với trường hợp thay đổi độ rỗng khi vẫn làm tăng đáng kể giá trị tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn.



Hình 2.15. Khảo sát các mode m mất ổn định cơ và nhiệt của chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng

Ứng xử cơ nhiệt của kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn với năm mode mất ổn định đầu tiên được trình bày trên Hình 2.15. Các khảo sát trong Hình 2.15a và Hình 2.15b được xem xét với $\Delta T = 0$, tức là không tạo ra độ võng nhiệt trước. Hình 2.15c và Hình 2.15d được xem xét không có ứng suất trước q = 0. Có thể thấy mode mất ổn định đầu tiên (m=1) dễ dàng xảy ra nhất trong tất cả các trường hợp được khảo sát. Đường cong sau mất ổn định cao hơn rõ ràng khi mode mất ổn định tăng lên. Do đó, trong các khảo sát số tiếp theo chỉ nghiên cứu mode mất ổn định đầu tiên m=1. Trong trường hợp kết cấu tấm tròn hoàn hảo dưới tải nhiệt (Hình 2.15c) mới có thể quan sát được trạng thái màng và hiện tượng phân nhánh và tải nhiệt tới hạn tăng mạnh khi mode mất ổn định tăng.



Hình 2.16. So sánh ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip sandwich FG-GPLRC lõi rỗng

So sánh các đường cong $q \sim W / h$ và $\Delta T \sim W / h$ của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip sandwich FG-GPLRC lõi rỗng được trình bày trong Hình 2.16. Như được quan sát trong Hình 2.2, cấu hình hình học của chỏm parabol và chỏm cầu rất gần nhau. Vì vậy, các đường cong sau mất ổn định của hai loại chỏm này không khác biệt đáng kể. Trong trường hợp kết cấu không có ứng suất nhiệt trước không thể quan sát hiện tượng snap-through trong Hình 2.16a, mà chỉ quan sát thấy với trường hợp kết cấu có ứng suất nhiệt trước trong Hình 2.16b. Khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định của chỏm sin là tốt nhất trong trường hợp không có ứng suất nhiệt trước. Trong trường hợp kết cấu chịu tải cơ có ứng suất nhiệt trước, độ võng trước do nhiệt tạo ra vùng có độ võng về phía âm của trục z và đường cong sau mất ổn định của chỏm sin thấp hơn so với các loại chỏm khác trong vùng độ võng nhỏ nhưng trong vùng có độ võng lớn các đường cong sau mất ổn định của chỏm sin là cao nhất. Ngoài ra, đường cong sau mất ổn định cơ và nhiệt của chỏm elip là thấp nhất trong trường hợp không có ứng suất trước (Hình 2.16a và Hình 2.16c). Do ứng suất trước gây ra độ võng trước của chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip được quan sát thấy ở vùng độ võng dương trong Hình 2.16d.

So sánh khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn với năm loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng khác nhau thể hiện trong Hình 2.17. Kết quả cho thấy, đối với cả hai trường hợp chịu tải cơ và nhiệt của kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn, khả năng chịu tải sau mất ổn định của cấu trúc V-PC-A là cao nhất và cấu trúc A-PC-V là nhỏ nhất. Đối với tải nhiệt, ảnh hưởng của năm loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng được thể hiện rõ nhất trong trường hợp tấm tròn hoàn hảo (Hình 2.17b) và ít rõ rệt trong trường hợp chỏm sin (Hình 2.17d).

Không giống như trường hợp tấm tròn chịu tải nhiệt khảo sát ở trên, trong trường hợp chỏm sin UD-PC-UD chịu tải cơ và chỏm parabol V-PC-A chịu tải nhiệt khả năng chịu tải sau mất ổn định đều giảm khi độ rỗng tăng (Hình 2.18).

Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến khả năng chịu tải sau mất ổn định của chỏm sin được nghiên cứu trong Hình 2.19. Khả năng chịu tải sau mất ổn định tăng lên và hiện tượng snap-through giảm đáng kể khi tỷ phần khối lượng GPL tăng. So sánh chỏm sin hoàn hảo và không hoàn hảo cũng được khảo sát trong Hình 2.19 cho thấy khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định của kết cấu hoàn hảo giảm rõ rệt so với kết cấu không hoàn hảo trong vùng độ võng lớn. Trong khi khả năng chịu tải nhiệt của kết cấu hoàn hảo luôn luôn cao hơn so với kết cấu không hoàn hảo.



Hình 2.17. So sánh năm loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng về ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn



Hình 2.18. Ảnh hưởng của độ rỗng lõi đến ứng xử cơ của chỏm sin UD-PC-UD và nhiệt của chỏm parabol V-PC-A sau mất ổn định



Hình 2.19. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến ứng xử cơ và nhiệt của chỏm sin V-PC-A và X-PC-X sau mất ổn định

Hình 2.20 khảo sát ảnh hưởng của độ nâng tại đỉnh tới khả năng chịu tải cơ của chỏm parabol UD-PC-UD và tải nhiệt của chỏm sin V-PC-A sau mất ổn định. Kết quả thể hiện trong khi khả năng chịu tải nhiệt sau mất ổn định tăng khi độ nâng tại đỉnh tăng ở cả vùng có độ võng lớn và nhỏ, thì khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định chỉ tăng ở vùng có độ võng nhỏ. Ngoài ra, ảnh hưởng của độ không hoàn hảo đối với khả năng chịu tải cơ (Hình 2.20a) và tải nhiệt (Hình 2.20b) của kết cấu cũng thu được kết quả tương tự như khảo sát trên Hình 2.19.



Hình 2.20. Ảnh hưởng của độ nâng đỉnh đến ứng xử cơ của chỏm parabol UD-PC-UD và nhiệt của chỏm sin V-PC-A sau mất ổn định

Những ảnh hưởng đáng chú ý của các hệ số nền K_1, K_2 đến ứng xử cơ của chỏm elip V-PC-A và nhiệt của chỏm sin X-PC-X sau mất ổn định thu được trong Hình
2.21. Các kết quả số cho thấy khả năng chịu tải sau mất ổn định của kết cấu lớn hơn khi các thông số nền tuyến tính tăng. Như được quan sát trong Hình 2.21a, hiện tượng snap-through giảm rõ ràng khi các hệ số nền tuyến tính tăng lên.



Hình 2.21. Ảnh hưởng của hệ số nền K_1, K_2 đến ứng xử cơ của chỏm elip V-PC-A và nhiệt của chỏm sin X-PC-X sau mất ổn đinh



Hình 2.22. Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến K_3 đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm parabol X-PC-X

Ånh hưởng của hệ số nền phi tuyến với các hệ số nền dương (nền hóa cứng) và âm (nền hóa mềm) được xem xét trong Hình 2.22. Rõ ràng, xu hướng cong lên được thể hiện trong các đường cong sau mất ổn định của phần nền hóa cứng. Ngược lại, xu hướng cong xuống của các đường cong sau mất ổn định ở vùng độ võng lớn đối với nền hóa mềm.

2.5. Kết luận chương 2

Chương 2 luận án đã đạt được các kết quả quan trọng sau:

- Thiết lập hệ phương trình chủ đạo cho bài toán ổn định tĩnh phi tuyến của kết cấu vỏ chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn chịu tải áp lực ngoài phân bố đều và tải nhiệt tăng đều theo chiều dày dựa trên FSDT, có xét đến tính phi tuyến hình học theo nghĩa von Kármán. Trong đó kết cấu vỏ chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip lần đầu tiên được nghiên cứu. Mô hình nền đàn hồi phi tuyến cũng được tích hợp vào hệ phương trình để mô tả chính xác hơn sự tương tác giữa kết cấu và nền đàn hồi trong điều kiện tải trọng phức tạp.

- Bằng phương pháp tiếp cận dựa trên chuyển vị, các thành phần chuyển vị, góc xoay và độ không hoàn hảo của kết cấu được biểu diễn dưới dạng các hàm lượng giác. Dạng nghiệm này cho phép xem xét đồng thời nhiều mode mất ổn định khác nhau, nhờ đó mô hình toán học có khả năng mô tả chính xác hơn diễn biến thực tế của quá trình mất ổn định và giai đoạn sau mất ổn định của kết cấu vỏ.

- Bằng cách áp dụng phương pháp Galerkin, các biểu thức dạng hiển đã được thiết lập để xác định tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn và mối quan hệ phi tuyến giữa tải áp lực ngoài và tải nhiệt với độ võng trong giai đoạn sau mất ổn định phi tuyến của các kết cấu tấm tròn và vỏ chỏm thoải có độ cong phức tạp bao gồm vỏ chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin và chỏm elip.

- Kết quả khảo sát số cho thấy ứng xử ổn định cơ nhiệt của kết cấu mang tính chất phức tạp. Các mode mất ổn định của kết chỏm thoải và tấm tròn chịu tải cơ và tải nhiệt đã được khảo sát chi tiết. Ảnh hưởng của các yếu tố vật liệu và hình học, ảnh hưởng của hệ số nền đàn hồi đến tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn và ứng xử cơ nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm thoải và tấm tròn cũng được nghiên cứu. Những kết quả thu được cung cấp cái nhìn tổng thể giúp hiểu rõ hơn về ứng xử sau mất ổn định của kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn bằng vật liệu FG-GPLRC rõng và sandwich FG-GPLRC lõi rõng, làm cơ sở cho các nghiên cứu tiếp theo về thiết kế và tối ưu hóa kết cấu này trong điều kiện làm việc thực tế.

Chương 3. ÔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA KẾT CẤU CHỎM CẦU THOẢI VÀ TẤM TRÒN BẰNG FGM RÕNG, SANDWICH FGM LÕI RÕNG, FG-GPLRC VÀ SANDWICH FG-GPLRC LÕI RÕNG THEO R3SDT VÀ PHƯƠNG PHÁP RITZ – TIẾP CẬN THEO CHUYỀN VỊ

Tiếp nối chương 2, trong chương này tập trung xem xét kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn áp dụng bốn loại vật liệu tiên tiến: FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng. Kết cấu biến dạng đối xứng trục có biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến, chịu tải áp lực ngoài và tải nhiệt tăng đều theo chiều dày, và đặt trên nền đàn hồi phi tuyến ba hệ số.

Các phương trình chủ đạo được thiết lập dựa trên R3SDT trong đó có xét đến độ không hoàn hảo về hình dạng ban đầu và tính phi tuyến hình học theo nghĩa von Kármán. R3SDT là lý thuyết có xét đến các thành phần biến dạng trượt ngang mà không cần có hệ số hiệu chỉnh trượt bởi thỏa mãn được điều kiện biên về ứng suất và biến dạng trượt tại mặt trên và mặt dưới kết cấu. Do đó, R3SDT có độ chính xác tốt hơn và phù hợp với cả kết cấu thành mỏng và thành dày, cũng như vật liệu đẳng hướng và dị hướng. Sử dụng dạng nghiệm đa thức để giảm bớt độ phức tạp của bài toán mà vẫn đảm bảo tính chính xác của phương pháp. Phương pháp năng lượng Ritz được áp dụng để thu được hệ phương trình cân bằng dưới dạng đại số phi tuyến. Sau khi thực hiện một số biến đổi toán học, có thể xác định các liên hệ phi tuyến giữa tải cơ, tải nhiệt và độ võng. Từ đó, các biểu thức của tải cơ và tải nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn và tải nhiệt tới hạn của tấm tròn có thể nhận được dưới dạng hiển.

Các khảo sát số được tiến hành để đánh giá ảnh hưởng của các thông số vật liệu và hình học, ảnh hưởng của các hệ số nền đến tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn và khả năng chịu tải sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn. Các thảo luận và nhận xét có ý nghĩa được thực hiện một cách chi tiết.

Nội dung của chương này đã được công bố trong 04 bài báo trên các tạp chí quốc tế ISI (SCIE) (Bài báo số 4, 5, 6 và 7 trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả liên quan đến luận án).

3.1. Các phương trình chủ đạo theo R3SDT và phương trình năng lượng của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn

3.1.1. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn

Hình 3.1 thể hiện kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn với các thông số hình học gồm: chiều dày h, độ nâng lớn nhất tại đỉnh của chỏm H, bán kính cong chính R và bán kính đáy a. Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn được giả thiết biến dạng đối xứng trục, có điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến và đặt trên nền đàn hồi phi tuyến ba hệ số gồm: K_1 là độ cứng tuyến tính của mô hình nền Winkler, K_2 là độ cứng tuyến tính của mô hình nền Winkler, K_3 là độ cứng phi tuyến có thể dương hoặc âm tương ứng với nền hóa cứng và nền hóa mềm. Tải tác dụng lên kết cấu gồm tải áp lực ngoài phân bố đều trên bề mặt q và tải nhiệt tăng đều theo chiều dày ΔT .



Hình 3.1. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn theo R3SDT

Hệ tọa độ cực (φ, θ, z) được đặt ở mặt giữa của vỏ với z là trục hướng tâm vuông góc với mặt giữa, θ là tọa độ theo hướng chu vi và φ là tọa độ theo hướng kinh tuyến. Kết cấu chỏm cầu thoải phù hợp với giả thiết có độ thoải lớn nên các phép tính gần đúng $\cos \varphi \approx 1$ và $Rd\varphi \approx dr$ được áp dụng và biến số φ được thể hiện thông qua biến số mới $r = R \sin \varphi$ thể hiện tọa độ theo hướng bán kính. Từ đó, hệ tọa độ (r, θ, z) được sử dụng nhằm đơn giản hóa quá trình tính toán. Các phương trình lý thuyết và các phương trình quan hệ được thiết lập với trường hợp kết cấu chỏm cầu

thoải, các phương trình và quan hệ của kết cấu tấm tròn thu được khi cho bán kính cong chính $R \rightarrow \infty$.

3.1.2. Thiết lập các phương trình chủ đạo theo R3SDT

Các giả thiết được áp dụng trong bài toán gồm: giả thiết vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi, các thành phần biến dạng nhỏ đảm bảo liên hệ giữa ứng suất và biến dạng là tuyến tính tuân theo định luật Hooke và các thành phần phi tuyến hình học của von Kármán phù hợp với giả thiết độ võng lớn.

- Phương trình quan hệ biến dạng – chuyển vị

Theo R3SDT, các thành phần chuyển vị tại điểm có tọa độ z (cách mặt giữa một khoảng bằng z) của kết cấu chỏm cầu thoải biến dạng đối xứng trục được xác định như sau:

$$\overline{u}(r,z) = u(r) + z\psi(r) - \frac{4z^3}{3h^2} \left[\psi(r) + w(r)_{,r} \right],$$

$$\overline{v}(r,z) = 0,$$

$$\overline{w}(r,z) = w(r) + w^*(r),$$
(3.1)

trong đó $\psi(r)$ là góc quay pháp tuyến của mặt giữa, $w^*(r)$ là hàm biểu thị độ không hoàn hảo hình học ban đầu của kết cấu.

Các thành phần biến dạng tại điểm có tọa độ z của kết cấu chỏm cầu thoải biến dạng đối xứng trục được xác định như sau:

$$\begin{cases} \varepsilon_r \\ \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon_r^0 + z\psi_{,r} - \frac{4}{3h^2}z^3(\psi_{,r} + w_{,rr}) \\ \varepsilon_{\theta}^0 + z\frac{\psi}{r} - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\frac{\psi}{r} + \frac{w_{,r}}{r}\right) \\ \varepsilon_{rz}^0 - \frac{4}{h^2}z^2(\psi + w_{,r}) \end{cases},$$
(3.2)

trong đó: $\varepsilon_r^0, \varepsilon_{\theta}^0, \varepsilon_{rz}^0$ là các thành phần biến dạng tại điểm thuộc mặt giữa tương ứng được xác định dựa vào giả định độ võng lớn phi tuyến của von Kármán như sau:

- Phương trình quan hệ giữa ứng suất – biến dạng

Áp dụng định luật Hooke cho kết cấu chỏm cầu thoải có tính đến biến dạng nhiệt, được thiết lập bằng công thức (2.8) trong mục 2.1.2 thuộc Chương 2 luận án.

- Phương trình lực giãn, mô men và lực cắt

Các biểu thức của nội lực gồm lực giãn, mômen, mômen bậc cao, lực cắt và lực cắt bậc cao được xác định như sau:

$$(N_{r}, M_{r}, P_{r}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^{3}) \sigma_{r} dz,$$

$$(N_{\theta}, M_{\theta}, P_{\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^{3}) \sigma_{\theta} dz,$$

$$(Q_{r}, R_{r}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^{2}) \sigma_{rz} dz.$$

(3.4)

Thế phương trình (3.2) vào phương trình (2.8), sau đó thay các phương trình kết quả vào phương trình (3.4) thu được:

$$\begin{cases} N_{r} \\ N_{\theta} \\ M_{r} \\ M_{\theta} \\ P_{r} \\ P_{\theta} \\ P_{r} \\ P_{\theta} \\ \end{cases} = \begin{cases} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & C_{11} & C_{12} \\ A_{12} & A_{22} & B_{12} & B_{22} & C_{12} & C_{22} \\ B_{11} & B_{12} & D_{11} & D_{12} & F_{11} & F_{12} \\ B_{12} & B_{22} & D_{12} & D_{22} & F_{12} & F_{22} \\ C_{11} & C_{12} & F_{11} & F_{12} & G_{11} & G_{12} \\ C_{12} & C_{22} & F_{12} & F_{22} & G_{12} & G_{22} \\ \end{cases} = \begin{cases} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & D_{11} & D_{12} & F_{11} & F_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{11} & A_{12} & A_{11} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{$$

trong đó:

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, C_{ij}, F_{ij}, G_{ij}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}\left(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6\right) dz \text{ với } ij = 11, 12, 22, \qquad (3.6)$$

$$H_{44} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} dz - \frac{4}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} z^2 dz, \quad H_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} z^2 dz - \frac{4}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} z^4 dz, \quad (3.7)$$

$$\Phi_{1} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z) dz, \qquad \Phi_{2} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z) z dz,$$

$$\Phi_{3} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z) z^{3} dz.$$
(3.8)

3.1.3. Thiết lập các phương trình năng lượng

Thế năng biến dạng nhiệt đàn hồi của kết cấu chỏm cầu thoải biến dạng đối xứng trục được tính như sau:

$$U_{\rm int} = \pi \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{0}^{a} \left[\sigma_r \left(\varepsilon_r - \alpha \Delta T \right) + \sigma_{\theta} \left(\varepsilon_{\theta} - \alpha \Delta T \right) + \sigma_{rz} \varepsilon_{rz} \right] r dr dz, \qquad (3.9)$$

Thế các phương trình (3.2) và (2.8) vào phương trình (3.9) thu được:

$$U_{\text{int}} = \pi \int_{0}^{a} \left\{ \left[\varepsilon_{r}^{0} N_{r} + \psi_{,r} M_{r} - \frac{4}{3h^{2}} (\psi_{,r} + w_{,rr}) P_{r} \right] + \left[\varepsilon_{\theta}^{0} N_{\theta} + \frac{\psi}{r} M_{\theta} - \frac{4}{3h^{2}} \left(\frac{\psi}{r} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) P_{\theta} \right] + \left[\varepsilon_{rz}^{0} Q_{r} - \frac{4}{h^{2}} (\psi + w_{,r}) R_{r} \right] \right\} r dr$$

$$- \pi \Delta T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{0}^{a} \left\{ \alpha (Q_{11} + Q_{12}) \left[\varepsilon_{r}^{0} + z \psi_{,r} - \frac{4z^{3}}{3h^{2}} (\psi_{,r} + w_{,rr}) \right] + \alpha (Q_{12} + Q_{22}) \left[\varepsilon_{\theta}^{0} + z \frac{\psi}{r} - \frac{4z^{3}}{3h^{2}} \left(\frac{\psi}{r} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) \right] \right\} r dr dz$$
(3.10)

Công do ngoại lực thực hiện có xét đến sự tương tác với nền đàn hồi phi tuyến ba hệ số được tính như sau:

$$U_{ext} = 2\pi \int_{0}^{a} qwrdr - \pi \int_{0}^{a} \left\{ \left[K_{1}w - K_{2} \left(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) + \frac{1}{2} K_{3} w^{3} \right] w \right\} rdr, \quad (3.11)$$

Từ phương trình (3.10) và (3.11) năng lượng toàn phần thu được là:

$$U_{Total} = U_{int} - U_{ext} \tag{3.12}$$

3.2. Điều kiện biên, dạng nghiệm và phương pháp năng lượng Ritz

Kết cấu chỏm cầu thoải biến dạng đối xứng trục có điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến được thể hiện như sau:

$$r = 0: \quad u = 0, \quad \psi = 0, \quad w_{,r} = 0, r = a: \quad w = 0, \quad w_{,r} = 0, \quad \psi = 0, \quad u = 0,$$
(3.13)

Nghiệm gần đúng cho các thành phần chuyển vị và thành phần góc quay được lựa chọn dựa vào điều kiện biên (3.13) là [125]:

$$u = U \frac{r(a-r)}{a^{2}},$$

$$\psi = \Psi \frac{r(a^{2}-r^{2})}{a^{3}},$$

$$w = W \frac{(a^{2}-r^{2})^{2}}{a^{4}},$$

(3.14)

trong đó: U, Ψ và W lần lượt là biên độ của chuyển vị u, góc quay ψ và độ võng w.

Hàm độ võng không hoàn hảo ban đầu w^* được giả định có dạng tương tự độ võng của kết cấu như sau:

$$w^* = \xi h \frac{\left(a^2 - r^2\right)^2}{a^4},$$
 (3.15)

trong đó: ξ là kích thước không hoàn hảo được coi là nhỏ so với 1.

Thế các biểu thức của u, ψ và w trong phương trình (3.14), biểu thức của w^* trong phương trình (3.15) và các phương trình (3.3), (3.5) vào biểu thức năng lượng toàn phần (3.12) rồi áp dụng phương pháp năng lượng Ritz như sau:

$$\frac{\partial U_{Total}}{\partial U} = \frac{\partial U_{Total}}{\partial \Psi} = \frac{\partial U_{Total}}{\partial W} = 0, \qquad (3.16)$$

Kết quả sau khi giải các quan hệ trong phương trình (3.16) của phương pháp năng lượng Ritz thu được hệ ba phương trình đại số theo ba ẩn U, Ψ và W như sau:

$$a_{11}U + a_{12}\Psi + a_{13}W + a_{14}W^2 + a_{15}W\xi h = 0, \qquad (3.17)$$

$$a_{21}U + a_{22}\Psi + a_{23}W + a_{24}W^2 + a_{25}W\xi h = 0, \qquad (3.18)$$

$$a_{31}U + a_{32}\Psi + a_{33}W + a_{34}K_1W + a_{35}K_2W + a_{36}W^2 + a_{37}W^3 + a_{38}W^3K_3 + a_{39}WU + a_{310}U\xi h + a_{311}W\Psi + a_{312}\Psi\xi h + a_{313}W\xi h$$
(3.19)

$$+a_{314}W\xi^{2}h^{2}+a_{315}W^{2}\xi h+a_{316}\Delta T+a_{317}\Delta T\xi h+a_{317}W\Delta T-\frac{qa^{2}}{3}=0,$$

trong đó các hệ số được xác định là:

$$\begin{split} a_{11} &= \frac{1}{6} \Big(2A_{11} + A_{22} \Big), \qquad a_{12} = \frac{1}{90} \Big(-17C_{11} \frac{4}{h^2} - 7C_{22} \frac{4}{h^2} + 51B_{11} + 21B_{22} \Big), \\ a_{13} &= \frac{34}{45a} \Big(-\frac{9A_{11} + 66A_{12} + 57A_{22}}{238R} a^2 + \frac{4}{h^2} \frac{17C_{11} + 7C_{22}}{17} \Big), \\ a_{14} &= -\frac{2(23A_{11} - 41A_{12})}{315a}, \qquad a_{15} = -\frac{4(23A_{11} - 41A_{12})}{315a}, \qquad a_{21} = a_{12}, \\ a_{22} &= \frac{1}{12} \Big\{ \Big(a^2H_{55} + \frac{12G_{11} + 4G_{22}}{9} \Big) \frac{16}{h^4} - \Big[(H_{45} + H_{54})a^2 + \frac{24F_{11} + 8F_{22}}{3} \Big] \frac{4}{h^2} \\ &\quad + a^2H_{44} + 12D_{11} + 4D_{22} \Big\}, \\ a_{23} &= \frac{1}{3a} \Big\{ \Big[-H_{55} \frac{16}{h^4} + \Big(H_{45} + H_{54} + \frac{3C_{22} + C_{11} + 4C_{12}}{12R} \Big) \frac{4}{h^2} - H_{44} \\ &\quad - \frac{B_{11} + 4B_{12} + 3B_{22}}{4R} \Big] a^2 - \frac{4}{9} \Big(3G_{11} + G_{22} \Big) \frac{16}{h^4} + \frac{4}{3} \Big(3F_{11} + F_{22} \Big) \frac{4}{h^2} \Big\}, \\ a_{24} &= -\frac{2}{15a} \Big[\Big(\frac{3C_{12} - C_{11}}{3} \Big) \frac{4}{h^2} + B_{11} - 3B_{12} \Big], \\ a_{25} &= -\frac{1}{15a} \Big[\frac{16}{3h^2} \Big(3C_{12} - C_{11} \Big) + 4B_{11} - 12B_{12} \Big], \\ a_{31} &= a_{13}, \qquad a_{32} = a_{23}, \\ a_{33} &= \frac{16}{9a^2} \Big\{ \frac{9A_{11} + 18A_{12} + 9A_{22}}{8R} a^4 + \Big[\frac{3}{4} \Big(H_{55} \frac{16}{h^4} + \Big(-H_{45} - H_{54} \Big) \frac{4}{h^2} + H_{44} \Big) \\ &\quad - \frac{3C_{22} + C_{11} + 4C_{12}}{8R} \frac{4}{h^2} \Big] a^2 + \frac{16}{h^4} \frac{3G_{11} + G_{22}}{4} \Big\}, \\ a_{34} &= \frac{a^2}{5}, \quad a_{35} &= \frac{4}{3}, \quad a_{36} &= -\frac{1}{15Ra^2} \Big[\frac{32}{h^2} \Big(C_{11} - 3C_{12} \Big) R + 12a^2 \Big(A_{11} + A_{12} \Big) \Big], \\ a_{37} &= \frac{128A_{11}}{105a^2}, \quad a_{38} &= \frac{2a^2}{9}, \quad a_{39} &= a_{310} &= \frac{4(41A_{12} - 23A_{11})}{315a}, \\ a_{311} &= a_{312} &= -\frac{4}{15a} \Big(\frac{3C_{12} - C_{11}}{3} \frac{4}{h^2} + B_{11} - 3B_{12} \Big), \\ a_{313} &= -\frac{1}{15Ra^2} \Big[\frac{128}{h^2} \Big(C_{11} - 3C_{12} \Big) R + 48a^2 \Big(A_{11} + A_{12} \Big) \Big], \\ a_{313} &= -\frac{1}{45Ra^2} \Big[\frac{128}{h^2} \Big(C_{11} - 3C_{12} \Big) R + 48a^2 \Big(A_{11} + A_{12} \Big) \Big], \\ a_{314} &= \frac{256A_{11}}{105a^2}, \quad a_{315} &= \frac{128A_{11}}{35a^2}, \quad a_{316} &= \frac{2a^2\Phi_1}{3}, \quad a_{317} &= -\frac{4}{3}\Phi_1. \end{aligned}$$

Thực hiện giải hệ hai phương trình (3.17) và (3.18) thu được các biểu thức của biên độ U và Ψ là:

$$U = b_{11}W + b_{12}W^2 + b_{13}W\xi h, \qquad (3.20)$$

$$\Psi = b_{21}W + b_{22}W^2 + b_{23}W\xi h, \qquad (3.21)$$

trong đó các hệ số được xác định như sau:

$$b_{11} = \frac{a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, b_{12} = \frac{a_{24}a_{12} - a_{14}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, b_{13} = \frac{a_{25}a_{12} - a_{15}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, b_{21} = -\frac{a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, b_{22} = -\frac{a_{24}a_{11} + a_{14}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, b_{23} = \frac{a_{25}a_{11} + a_{15}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Thế các biểu thức của U và Ψ trong các phương trình (3.20) và (3.21) vào phương trình (3.19) thu được phương trình kết quả là:

$$(c_{1}+K_{3}c_{2})W^{3}+c_{3}W^{2}+(c_{4}+K_{1}c_{5}+K_{2}c_{6}+c_{7}\xi h+c_{8}\xi h^{2} +c_{9}\xi^{2}h^{2}+c_{10}\Delta T)W+(c_{11}\xi h+c_{12})\Delta T-\frac{qa^{2}}{3}=0,$$
(3.22)

trong đó các hệ số được xác định như sau:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{311}b_{22} + a_{39}b_{12} + a_{37}, \quad c_2 &= a_{38}, \quad c_3 &= a_{31}b_{12} + a_{311}b_{21} + a_{32}b_{22} + a_{39}b_{11} + a_{36}, \\ c_4 &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}, \quad c_5 &= a_{34}, \quad c_6 &= a_{35}, \\ c_7 &= a_{31}b_{13} + a_{310}b_{11} + a_{312}b_{21} + a_{32}b_{23} + a_{313}, \\ c_8 &= a_{310}b_{12} + a_{311}b_{23} + a_{312}b_{22} + a_{39}b_{13}, \quad c_9 &= a_{310}b_{13} + a_{312}b_{23} + a_{314}, \\ c_{10} &= a_{317}, \quad c_{11} &= a_{316}, \quad c_{12} &= a_{315}. \end{aligned}$$

Phương trình (3.22) thể hiện mối liên hệ giữa tải áp lực ngoài q, tải nhiệt ΔT và biên độ của độ võng W. Từ phương trình này, lần lượt thu được biểu thức của tải áp lực ngoài q và tải nhiệt tăng đều ΔT như sau:

$$q = (c_1 + K_3 c_2) W^3 + c_3 W^2 + c_8 \xi h W^2 + (c_4 + K_1 c_5 + K_2 c_6) W + c_7 \xi h W + c_9 \xi^2 h^2 W + c_{10} \Delta T W + c_{11} \xi h \Delta T + c_{12} \Delta T,$$
(3.23)

$$\Delta T = -\frac{1}{(c_{10}W + c_{11}\xi h + c_{12})} \Big[(c_1 + K_3 c_2) W^3 + c_3 W^2 + c_8 \xi h W^2 + (c_4 + K_1 c_5 + K_2 c_6) W + c_7 \xi h W + c_9 \xi^2 h^2 W - q \Big].$$
(3.24)

Biểu thức (3.23) và (3.24) được sử dụng để nghiên cứu ứng xử cơ nhiệt phi tuyến sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải đặt trên nền đàn hồi phi tuyến. Các phương trình quan hệ tương ứng cho kết cấu tấm tròn thu được khi cho $R \rightarrow \infty$.

Đối với kết cấu tấm tròn hoàn hảo $(\xi = 0, R \rightarrow \infty)$, giá trị tải nhiệt tới hạn theo tiêu chuẩn mất ổn định phân nhánh được xác định khi cho $W \rightarrow 0$ ở phương trình (3.24), thu được là:

$$\Delta T_{cr} = -\frac{K_1 c_5 + K_2 c_6 + c_4}{c_{10}}.$$
(3.25)

Hiện tượng mất ổn định phân nhánh không xảy ra với kết cấu chỏm cầu thoải.

Luận án sử dụng phần mềm Maple và Excel để thực hiện khảo sát số cho kết cấu tấm tròn và chỏm cầu thoải ứng dụng kết quả lý thuyết đã nhận được ở dạng hiển.

3.3. Nghiên cứu so sánh

Đế khẳng định độ tin cậy của phương pháp sử dụng trong luận án, so sánh biên độ độ võng W (mm) của tấm tròn đẳng hướng chịu tải áp lực ngoài phân bố đều với kết quả của Reddy [98] được trình bày trong Bảng 3.1. Các kết quả luận án phi tuyến thu được từ biểu thức (3.23) và kết quả luận án tuyến tính được xác định bằng cách loại bỏ các số hạng phi tuyến trong phương trình này. Kết quả của Reddy thu được lời giải chính xác bằng cách sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển cho bài toán ổn định tuyến tính. Hầu hết các kết quả so sánh đều trùng nhau với độ lệch 0%. Sai số lớn bất thường (21.78%) chỉ xảy ra với kết quả mỏng h/a = 0.01. Do khi h/a bé mà với cùng một tải trọng thì độ võng của tấm sẽ lớn, lúc này mô hình tuyến tính không còn đủ độ chính xác nữa dẫn tới sai lệch lớn giữa mô hình tuyến tính và phi tuyến. Như vậy, so sánh này khẳng định tính đúng đắn của phương pháp trong luận án.

h/a	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
Reddy [98]	8.212	0.513	3.208×10 ⁻²	6.336×10 ⁻³	2.005×10 ⁻³	8.212×10 ⁻⁴
Luận án	8.212	0.513	3.208×10 ⁻²	6.336×10 ⁻³	2.005×10 ⁻³	8.212×10 ⁻⁴
(tuyến tính)	$(0\%)^{*}$	(0%)	(0%)	(0%)	(0%)	(0%)
Luận án	6.423	0.512	3.208×10 ⁻²	6.336×10 ⁻³	2.005×10-3	8.212×10 ⁻⁴
(phi tuyến)	(21.78%)	(0.19%)	(0%)	(0%)	(0%)	(0%)

Bảng 3.1. So sánh biên độ độ võng W (mm) của tấm tròn đẳng hướng chịu tải áp lực ngoài phân bố đều (E = 207.78GPa, h = 0.01m, q = 10kN/m², v = 0.34)

* Độ lệch giữa kết quả của tác giả khác với kết quả của luận án

Tiếp theo, so sánh độ võng của kết cấu tấm tròn FGM trong nghiên cứu của Reddy [99] (sử dụng FSDT cho bài toán tuyến tính với lời giải nghiệm chính xác) với kết quả độ võng tuyến tính và phi tuyến của luận án thể hiện trong Hình 3.2. Kết quả so sánh phù hợp với kết quả so sánh trước, với tỷ số hình học của tấm a / h = 10 các kết quả so sánh gần như trùng khớp nhau, với tấm quá mỏng, dẫn tới độ võng nhận được là rất lớn, xảy ra sự sai số lớn đối với kết quả phi tuyến của luận án.



Hình 3.2. So sánh biên độ độ võng của tấm tròn FGM với kết quả của Reddy [99]



Hình 3.3. So sánh đường cong sau mất ổn định chịu tải áp lực ngoài của chỏm cầu thoải S-FGM với kết quả của Anh và Đức [17]

Cuối cùng, so sánh đường cong quan hệ tải – độ võng sau mất ổn định phi tuyến của chỏm cầu thoải Sigmoid FGM chịu tải áp lực ngoài phân bố đều không tương tác với nền với kết quả của Vũ Thị Thùy Anh và Nguyễn Đình Đức [17] được trình bày trong Hình 3.3. Nghiên cứu của Vũ Thị Thùy Anh và Nguyễn Đình Đức sử dụng FSDT và hệ phương trình cân bằng được giải bằng phương pháp Galerkin. Có thể quan sát thấy, các kết quả là hoàn toàn trùng khớp với nhau.

3.4. Khảo sát số phân tích ổn định phi tuyến kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn bằng FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng

3.4.1. Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FGM rỗng

Xét kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FGM rỗng ngàm cố định xung quanh chu tuyến đặt trên nền đàn hồi phi tuyến ba hệ số (Hình 3.4). Tải tác dụng bao gồm tải áp lực ngoài phân bố đều trên bề mặt ngoài và tải nhiệt tăng đều trên chiều dày kết cấu. FGM rỗng được xem xét với hai trường hợp phân bố tỷ phần thể tích rỗng khác nhau là: FG-UD và FG-O. Tính chất hiệu dụng của FGM rỗng được lấy theo mục 1.3.1.



Hình 3.4. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FGM rỗng

Kết quả khảo sát ở Bảng 3.2 cho thấy tỷ số a / h tăng làm tải nhiệt tới hạn của các kết cấu tấm tròn FGM rỗng giảm mạnh. Điều này cũng thể hiện tải nhiệt tới hạn sẽ giảm khi độ dày tương đối của kết cấu tấm mỏng hơn. Ngoài ra, tải nhiệt tới hạn giảm đáng kể khi chỉ số tỷ lệ thể tích k của FGM tăng. Nguyên nhân do chỉ số tỷ lệ thể tích k của FGM tăng. Nguyên nhân do chỉ số tỷ lệ thể tích k của FGM tăng lớn. Số liệu khảo sát còn cho thấy tải nhiệt tới hạn của tấm tròn với loại phân bố thể tích rỗng FG-UD lớn hơn đáng kể so với loại FG-O có cùng độ rỗng. Điều này được giải thích là mặc dù FG-O cũng mang lại độ cứng lớn hơn, tuy nhiên, loại phân bố thể tích rỗng này cũng làm tăng sự giãn nở nhiệt của kết cấu.

Bảng 3.2. Ảnh hưởng của loại phân bố rỗng, tỷ số a / h, chỉ số tỷ lệ thể tích k của FGM đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn FGM rỗng (h = 0.01 m, q = 0MPa, $e_0 = 0.2, \xi = 0, K_1 = 10^7 \text{ N/m}^3, K_2 = 5 \times 10^5 \text{ N/m}, K_3 = 10^{12} \text{ N/m}^5$)

Loại phân	a / h	k					
bố rỗng		0.1	1	3	5	7	10
	20	363.0935	261.7301	234.1105	226.0956	221.0567	215.8588
FG-UD	30	194.5095	138.5774	123.6125	119.3649	116.7763	114.1613
	50	102.4282	75.2785	68.2672	66.3665	65.2596	64.1742
	20	235.5449	184.5612	168.1579	162.9868	159.8233	156.6700
FG-O	30	120.4377	93.8523	85.4020	82.7822	81.2043	79.6475
	50	59.0091	47.0915	43.3369	42.2085	41.5510	40.9167

Bảng 3.3 cho thấy sự gia tăng đáng kể giá trị tải nhiệt tới hạn của tấm tròn với loại phân bố rỗng FG-UD nhưng lại giảm đáng kể với loại phân bố rỗng FG-O khi độ rỗng e tăng lên. Ngoài ra có thể thấy nền đàn hồi có tác dụng hỗ trợ tốt làm tăng độ cứng của kết cấu tấm tròn dẫn đến tải nhiệt tới hạn tăng mạnh khi hệ số nền tăng lên. Tuy nhiên, cũng có thể thấy độ cứng phi tuyến K_3 không ảnh hưởng đến tải nhiệt tới hạn của các kết cấu tấm tròn trong kết quả khảo sát. Do tải nhiệt tới hạn của tấm tròn thu được theo kiểu phân nhánh, tương đương với tải nhiệt tới hạn tuyến tính, nên độ cứng phi tuyến không ảnh hưởng đến tải nhiệt tới hạn trong trường hợp này.

	$K_{1} = 0$	$K_1 = 10^7 \text{ N/m}^3$	$K_1 = 10^7 \mathrm{N/m^3}$	$K_1 = 10^7 \mathrm{N/m^3}$
e	$K_{2} = 0$	$K_{2} = 0$	$K_2 = 5 \times 10^5 \text{N/m}$	$K_2 = 5 \times 10^5 \text{N/m}$
	$K_{3} = 0$	$K_{3} = 0$	$K_{3} = 0$	$K_3 = 10^{12} \mathrm{N/m^5}$
0	200.2204	201.3891	211.0993	211.0993
0.1	220.3378	221.7659	233.6273	233.6273
0.3	276.3677	278.6791	297.8684	297.8684
0.5	373.1499	377.6387	415.0127	415.0127
0.7	577.1099	590.3481	704.4124	704.4124
0	200.2204	201.3891	211.0993	211.0993
0.1	187.2187	188.2869	197.1627	197.1627
0.3	164.7738	165.6737	173.1525	173.1525
0.5	146.2706	147.0367	153.4060	153.4060
0.7	130.9005	131.5593	137.0370	137.0370
	e 0 0.1 0.3 0.5 0.7 0 0.1 0.3 0.5 0.7	$\begin{array}{c} K_1 = 0 \\ e \\ K_2 = 0 \\ K_3 = 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 $	$\begin{array}{c cccc} & K_1 = 0 & K_1 = 10^7 \ {\rm N/m^3} \\ e & K_2 = 0 & K_2 = 0 \\ & K_3 = 0 & K_3 = 0 \\ \hline 0 & 200.2204 & 201.3891 \\ 0.1 & 220.3378 & 221.7659 \\ 0.3 & 276.3677 & 278.6791 \\ 0.5 & 373.1499 & 377.6387 \\ 0.7 & 577.1099 & 590.3481 \\ \hline 0 & 200.2204 & 201.3891 \\ 0.1 & 187.2187 & 188.2869 \\ 0.3 & 164.7738 & 165.6737 \\ 0.5 & 146.2706 & 147.0367 \\ 0.7 & 130.9005 & 131.5593 \\ \end{array}$	$K_1 = 0$ $K_1 = 10^7 \text{ N/m}^3$ $K_1 = 10^7 \text{ N/m}^3$ e $K_2 = 0$ $K_2 = 0$ $K_2 = 5 \times 10^5 \text{ N/m}$ $K_3 = 0$ $K_3 = 0$ $K_3 = 0$ 0200.2204201.3891211.09930.1220.3378221.7659233.62730.3276.3677278.6791297.86840.5373.1499377.6387415.01270.7577.1099590.3481704.41240200.2204201.3891211.09930.1187.2187188.2869197.16270.3164.7738165.6737173.15250.5146.2706147.0367153.40600.7130.9005131.5593137.0370

Bảng 3.3. Ảnh hưởng của loại phân bố rỗng, độ rỗng, hệ số nền đến tải nhiệt tới hạn tấm tròn FGM rỗng (h = 0.01m, a / h = 20, $\xi = 0$, q = 0Mpa, k = 1)

Ånh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích k của FGM đến ứng xử cơ nhiệt sau mất ổn định được trình bày trên Hình 3.5a, b đối với các kết cấu tấm tròn và Hình 3.5c, d đối với các kết cấu chỏm cầu thoải. Khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu tấm tròn và chỏm cầu thoải FGM rỗng tăng khi chỉ số tỷ lệ thể tích k của FGM giảm. Tuy nhiên, có thể thấy một lưu ý nhỏ trong Hình 3.5c, một xu hướng ngược lại của các đường cong trong vùng độ võng nhỏ. Nguyên nhân do nhiệt môi trường $\Delta T = 300$ K đã tạo ra độ võng âm trước khi chịu tác dụng bởi tải áp lực ngoài. Riêng trường hợp tải nhiệt đối với kết cấu tấm tròn hoàn hảo mới quan sát thấy hiện tượng mất ốn định ở dạng phân nhánh (Hình 3.5b). Ngoài ra, hiện tượng mất ốn định ở dang cực tri không xuất hiện ở tất cả các trường hợp được khảo sát. Có thể thấy sự khác biệt không đáng kể giữa xu hướng đường cong sau mất ổn đinh của kết cấu chỏm cầu thoải hoàn hảo và không hoàn hảo. Chỉ riêng kết cấu tấm tròn không hoàn hảo chiu tải nhiệt có các đường cong sau mất ổn định xuất phát từ gốc toa đô. Một lưu ý nữa là trong cả bốn nghiên cứu ở trên, chỉ có các đường cong sau mất ổn định trong trường hợp chỏm cầu thoải chịu tải nhiệt là thu được vùng có độ võng theo chiều âm của trục z, độ võng tiếp tục tăng theo hướng âm khi tải nhiệt tăng.



Hình 3.5. Ảnh hưởng chỉ số tỷ lệ thể tích k của FGM đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của tấm tròn và chỏm cầu thoải FGM rỗng



Hình 3.6. Ảnh hưởng của độ rỗng đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của tấm tròn FG-UD



Hình 3.7. Ảnh hưởng của độ rỗng đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải FG-O

Hình 3.6 và Hình 3.7 cho thấy ứng xử cơ nhiệt trái ngược nhau của kết cấu tấm tròn FG-UD với kết cấu chỏm cầu thoải FG-O khi độ rỗng tăng lên. Đối với kết cấu tấm tròn FG-UD, khi độ rỗng tăng thì khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định giảm trong khi khả năng chịu tải nhiệt tăng lên. Ngược lại, khi độ rỗng tăng thì khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải FG-O tăng lên trong khi khả năng chịu tải nhiệt lại giảm. Hiện tượng snap-through được quan sát thấy trong trường hợp kết cấu chỏm cầu thoải FG-O chịu tải cơ và cường độ của nó tăng rõ rệt khi độ rỗng tăng.



Hình 3.8. Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải FG-UD và FG-O



Hình 3.9. Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của tấm tròn FG-UD và FG-O

Ånh hưởng lớn của hệ số nền phi tuyến đến các đường cong sau mất ổn định cơ nhiệt của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FGM rỗng được thể hiện trên Hình 3.8 và Hình 3.9. Các trường hợp nền hóa cứng và hóa mềm được mô hình hóa bằng cách áp dụng độ cứng phi tuyến K_3 dương và âm tương ứng. Những khảo sát này cho thấy xu hướng hướng đi lên đều đặn của các đường cong sau mất ổn định cơ và nhiệt của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn đối với nền hóa cứng (độ cứng phi tuyến dương) và xu hướng đi xuống trong vùng độ võng lớn đối với nền hóa mềm (độ cứng phi tuyến âm).



Hình 3.10. Ảnh hưởng của nhiệt môi trường đến ứng xử cơ sau mất ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-O

Có thể quan sát ảnh hưởng của sự tăng nhiệt môi trường lên đường cong quan hệ tải cơ – độ võng sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-O trên Hình 3.10. Xu hướng các đường cong sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn là khác nhau rõ rệt. Các độ võng nhiệt trước được quan sát rõ ràng ở các kết cấu chỏm cầu thoải, ngược lại, nó không xuất hiện trên các kết cấu tấm tròn. Cường độ snap-through tăng rõ rệt khi nhiệt môi trường tăng.



Hình 3.11. Ảnh hưởng của tỷ số a / h đến ứng xử cơ của chỏm cầu thoải và nhiệt của tấm tròn FG-UD sau mất ổn định



Hình 3.12. Ảnh hưởng của tỷ số a / R đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của tấm tròn và chỏm cầu thoải FG-O

Trong cả hai trường hợp được khảo sát trên Hình 3.11, có thể thấy rằng khả năng chịu tải sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-UD giảm

mạnh khi tỷ số a/h tăng. Ngoài ra, cường độ snap-through của kết cấu chỏm cầu thoải FG-UD dưới áp lực ngoài tăng mạnh khi tỷ số a/h tăng.

Khảo sát ảnh hưởng của tỷ số a / R trên Hình 3.12 cho thấy khả năng chịu tải cơ của kết cấu tấm tròn và tải nhiệt của kết cấu chỏm cầu thoải FG-O sau mất ổn định tăng lên khi độ cong của vỏ lớn hơn. Ngoài ra, do trạng thái phi tuyến của vỏ, xu hướng ứng xử sau mất ổn định trở nên phức tạp được quan sát ở vùng độ võng lớn.

3.4.2. Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng

Xét kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng trên Hình 3.13. Kết cấu ngàm cố định xung quanh chu tuyến và tựa trên nền đàn hồi tuyến tính hai hệ số. Tải tác dụng bao gồm tải áp lực ngoài phân bố đều và tải nhiệt tăng đều trong kết cấu. Tính chất hiệu dụng của sandwich FGM lõi rỗng được lấy theo mục 1.3.2.





Ånh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích k của các lớp mặt FGM và tỷ số hình học a/h đến tải nhiệt tới hạn ΔT_{cr} của kết cấu tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng được trình bày trong Bảng 3.4. Có thể thấy rằng, khi tỷ số h_{fs}/h được giữ nguyên, tỷ số a/h của kết cấu tấm tròn tăng lên, tức là độ dày của các kết cấu tấm giảm, thì tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng giảm. Rõ ràng là khi độ dày tấm giảm thì các thành phần độ cứng của tấm cũng giảm, dẫn đến khả năng chịu tải của tấm giảm. Ngoài ra, ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích k của các lớp mặt FGM cũng có thể được quan sát thấy trong tất cả các kết quả khảo sát. Với đặc tính vượt trội là mô đun đàn hồi cao và hệ số giãn nở nhiệt nhỏ, rõ ràng tỷ lệ thể tích của

gốm tăng, độ cứng của tấm tăng và hệ số giãn nở nhiệt giảm, khả năng chịu tải nhiệt của tấm tròn tăng mạnh.

Bảng 3.4. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích k của lớp mặt FGM, tỷ số a / h đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng (h = 1mm, $h_{fs} = 0.2h$,

k		a / h					
ĸ	20	30	40	50			
0.1	180.5721	93.1591	62.1768	49.3799			
1	216.1058	110.7007	72.7444	56.5744			
3	238.6994	122.0160	79.7232	61.4735			
5	246.0424	125.7236	82.0354	63.1192			
7	249.6332	127.5443	83.1762	63.9358			
10	252.5195	129.0121	84.0989	64.5989			

 $h_{pc} = h - 2h_{fs}, e_0 = 0.1, \xi = 0, q = 0$ Mpa, $K_1 = 10^7$ N/m³, $K_2 = 5 \times 10^5$ N/m)

Bảng 3.5. Ảnh hưởng của hệ số nền, độ rỗng lõi, tỷ số h_{fs}/h đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng $(h = 0.01m, a / h = 20, h_{pc} = h - 2h_{fs}, \xi = 0, q = 0$ MPa , k = 1)

h_{fs}/h	0	$K_1 = 0 \text{ N/m}^3$	$K_1 = 10^7 \mathrm{N/m^3}$	$K_1 = 10^7 \mathrm{N/m^3}$
	\mathbf{e}_0	$K_2 = 0 \mathrm{N/m}$	$K_2 = 0$ N/m	$K_2 = 5 \times 10^5 \text{N/m}$
	0	174.4540	175.5876	185.0146
0.1	0.1	189.0240	190.2703	200.6357
0.1	0.2	205.0576	206.4302	217.8477
	0.3	222.5806	224.0941	236.6864
	0	191.7468	192.8864	202.3660
0.2	0.1	204.7118	205.9345	216.1058
0.2	0.2	218.3617	219.6725	230.5782
	0.3	232.5725	233.9759	245.6535
	0	204.9949	206.1419	215.6828
0.2	0.1	214.5774	215.7786	225.7710
0.5	0.2	224.2134	225.4692	235.9162
	0.3	233.7835	235.0936	245.9928

Số liệu trong Bảng 3.5 cho thấy khả năng chịu tải của lớp mặt FGM, tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn tăng rõ rệt nếu tỷ số độ dày h_{fs}/h của lớp mặt FGM tăng lên. Kết quả đáng chú ý nhất trong Bảng 3.5 là sự thay đổi của tải nhiệt tới hạn theo sự thay đổi của độ rỗng lõi e_0 . Tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn tăng lên khi độ rỗng của lõi e_0 tăng. Mặc dù việc tăng độ rỗng làm giảm độ cứng của kết cấu tấm tròn, nhưng hệ số giãn nở nhiệt của lõi cũng giảm, làm giảm ứng suất nhiệt ở trong tấm do đó làm tăng giá trị tải nhiệt tới hạn. Hệ số nền tăng cũng làm tăng mạnh giá trị tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng.



Hình 3.14. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích k của lớp mặt FGM đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FGM lõi rỗng

Hình 3.14 cho thấy chỉ số tỷ lệ thể tích k của lớp mặt FGM tăng đều làm tăng khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn

sandwich FGM lõi rỗng. Kết quả này tương tự với kết quả khảo sát tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn trong Bảng 3.4. Đối với trường hợp kết cấu tấm tròn chịu tải nhiệt, điểm phân nhánh được quan sát với kết cấu hoàn hảo và không xuất hiện với kết cấu không hoàn hảo. Điều này có thể được giải thích là do sự không hoàn hảo làm cho trạng thái màng của tấm không tồn tại, dẫn đến độ võng xảy ra ngay khi có ứng suất ở cạnh tấm. Ngược lại, do độ cong của kết cấu chỏm cầu thoải, sự giãn nở nhiệt tạo ra độ võng âm ngược chiều với trục z. Hiện tượng phân nhánh và kiểu mất ổn định cực trị cũng không được quan sát thấy trong trường hợp chỏm cầu thoải chịu tải nhiệt. Trong trường hợp này, xu hướng các đường cong của kết cấu chỏm cầu thoải hoàn hảo và không hoàn hảo cũng không có sự khác biệt đáng kể. Đối với tải cơ, xu hướng các đường cong sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn có sự khác nhau đáng kể. Trong khi các đường cong sau mất ổn định cực trị có thể được quan sát thấy trong trường hợp kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn có sự khác nhau đáng kể. Trong khi các đường còng sau mất ổn định cực trị có thể được quan sát thấy trong trường hợp kết cấu chỏm cầu thoải và cường độ snap-through tăng khi chỉ số tỷ lệ thể tích giảm.

Những ảnh hưởng của tỷ số hình học a/h và a/R trên các đường cong sau mất ổn định cơ nhiệt của các kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng được thể hiện trên Hình 3.15. Khả năng chịu tải sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng tăng lên đáng kể khi tỷ số a/h giảm (độ dày tăng lên). Việc tăng độ dày làm cho độ cứng của kết cấu tăng lên và dẫn đến khả năng chịu tải của trạng thái sau mất ổn định tăng lên đáng kể. Có thể quan sát thấy sự gia tăng lớn về cường độ snap-through của kết cấu chỏm cầu thoải khi tỷ số hình học a/h tăng (Hình 3.15d). Đối với các kết cấu chỏm cầu thoải không hoàn hảo, cũng xảy ra hiện tượng snap-through, nhưng với cường độ nhỏ hơn đáng kể so với trường hợp hoàn hảo. Ngoài ra, Hình 3.15e và f cho thấy độ cong của chỏm cầu thoải càng lớn thì khả năng chịu tải cơ và nhiệt của trạng thái sau mất ổn định càng lớn. Tuy nhiên, có những điểm bất thường được quan sát thấy ở vùng biến dạng nhỏ trong các đường cong tải nhiệt (Hình 3.15e) và trong vùng biến dạng lớn trong các đường cong tải cơ (Hình 3.15f).



Hình 3.15. Ảnh hưởng của tỷ số a / h và a / R đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FGM lõi rỗng

Hình 3.16 cho thấy ảnh hưởng của tỷ số h_{fs}/h đến xu hướng của các đường cong cơ và nhiệt sau mất ổn định tương tự với các trường hợp khảo sát khác. Rõ ràng là độ cứng tổng cộng của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng chủ yếu được đóng góp bởi hai lớp mặt FGM, do đó, khi độ dày của hai lớp mặt tăng thì độ cứng tổng của kết cấu cũng tăng và khả năng chịu tải cơ nhiệt của kết cấu cũng tăng rõ rệt. Ngoài ra, cường độ snap-through của kết cấu chỏm cầu thoải chịu tải cơ giảm khi tỷ lệ h_{fs}/h tăng.



Hình 3.16. Ảnh hưởng của tỷ số h_{fs}/h đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FGM lõi rỗng



Hình 3.17. Ảnh hưởng của độ rỗng lớp lõi đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FGM lõi rỗng

Độ rỗng của lớp lõi tăng làm tăng khả năng chịu tải nhiệt của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng trên Hình 3.17a, b. Kết quả này phù hợp với kết quả khảo sát trong Bảng 3.5 đối với tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn. Ngược lại, khả năng chịu tải cơ giảm khi độ rỗng tăng (Hình 3.17c, d). Trong Hình 3.17d có thể quan sát thấy các đường cong tải cơ của kết cấu chỏm cầu thoải có cường độ snap-through giảm khi độ rỗng tăng.

3.4.3. Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC

Khảo sát kết cấu vỏ chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC ngàm cố định xung quanh chu tuyến và đặt trên nền đàn hồi phi tuyến ba hệ số như Hình 3.18. Kết cấu chịu tải áp lực q phân bố đều trên bề mặt ngoài và tải nhiệt ΔT tăng đều theo chiều dày. FG-GPLRC được xem xét với năm loại quy luật phân bố khác nhau của tỷ phần

khối lượng GPL dọc theo chiều dày kết cấu gồm: UD-GPLRC, X-GPLRC, O-GPLRC, V-GPLRC và A-GPLRC. Tính chất hiệu dụng của FG-GPLRC được lấy theo mục 1.3.3.



Hình 3.18. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC

Bảng 3.6 khảo sát ảnh hưởng của tỷ số kích thước GPL t_{GPL}/a_{GPL} đến tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn FG-GPLRC với năm loại phân bố GPL. Số liệu khảo sát cho thấy khi tỷ số t_{GPL}/a_{GPL} tăng, tức là độ dày tương đối của GPL tăng, tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn FG-GPLRC tăng nhẹ đối với bốn loại phân bố GPL là: UD-GPLRC, O-GPLRC, V-GPLRC và A-GPLRC. Chỉ đối với loại phân bố X-GPLRC, mức giảm nhẹ được quan sát khi tỷ số t_{GPL}/a_{GPL} tăng. Ngoài ra, trong năm loại phân bố GPL tải nhiệt tới hạn loại X -GPLRC lớn nhất trong khi O -GPLRC là nhỏ nhất.

Bảng 3.7 cho thấy tỷ phần khối lượng của GPL tăng làm cho tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn tăng lên đáng kể đối với các loại phân bố X-GPLRC và UD-

GPLRC. Ngược lại, xu hướng phức tạp thu được cho ba loại phân bố còn lại. Cũng có thể thấy, thứ tự giá trị tải nhiệt tới hạn của 5 loại phân bố GPL vẫn được giữ nguyên. Ngoài ra, kết quả ở Bảng 3.6 và Bảng 3.7 đều thể hiện tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn V-GPLRC và A-GPLRC đều bằng nhau.

Bảng 3.6. Ảnh hưởng của thông số hình học GPL đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn FG-GPLRC (h = 0.01m, a / h = 20, $W_{GPL}^* = 2\%$, $a_{GPL} = 2.5 \mu m$, $\xi = 0$, $K_1 = 10MN / m^3$, $K_2 = 0.5MN / m$, $K_3 = 10^6 MN / m^5$)

t_{GPL} / a_{GPL}	X-GPLRC	UD-GPLRC	O-GPLRC	V-GPLRC	A-GPLRC
1×10-3	213.6924	175.7466	140.8884	165.1174	165.1174
2×10 ⁻³	213.6508	175.7662	140.9663	165.1810	165.1810
3×10 ⁻³	213.6093	175.7856	141.0439	165.2442	165.2442
4×10 ⁻³	213.5678	175.8049	141.1212	165.3069	165.3069
5×10 ⁻³	213.5264	175.8241	141.1980	165.3692	165.3692

Bảng 3.7. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến tải nhiệt tới hạn của tấm tròn FG-GPLRC $(h = 0.01m, a / h = 20, \xi = 0, K_1 = 10MN / m^3, K_2 = 0.5MN / m, K_3 = 10^6 MN / m^5)$

W^{*}_{GPL}	X-GPLRC	UD-GPLRC	O-GPLRC	V-GPLRC	A-GPLRC
0%	163.0512	163.0512	163.0512	163.0512	163.0512
0.5%	180.7061	164.9961	149.7932	162.9852	162.9852
1%	193.7848	168.1050	143.8303	162.9567	162.9567
1.5%	204.4757	171.7737	141.3772	163.6894	163.6894
2%	213.7091	175.7387	140.8571	165.0918	165.0918
2.5%	221.9539	179.8669	141.4978	166.9934	166.9934
3%	229.4765	184.0840	142.8777	169.2529	169.2529

Như có thể thấy trong Hình 3.19b, c và d các đường cong cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn loại X-GPLRC luôn cao nhất và loại O-GPLRC là thấp nhất. Điều này thể hiện loại phân bố X-GPLRC của GPL là tối ưu nhất để thiết kế kết cấu FG-GPLRC chịu tải cơ và nhiệt. Trong Hình 3.19a, có thể quan sát được xu hướng phức tạp của các đường cong sau mất ổn định với các loại phân bố GPL khác nhau. Trong trường hợp này, kết cấu chỏm cầu thoải chịu tải áp lực ngoài trong môi trường nhiệt $\Delta T = 300$ K, do ảnh hưởng của nhiệt, độ võng trước âm được tạo ra và có thể quan sát rõ hiện tượng snap-through.



Hình 3.19. Ảnh hưởng của quy luật phân bố GPL đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC

GPL thể hiện là vật liệu gia cường tuyệt vời trong Hình 3.20. Sự gia tăng 1% tỷ phần khối lượng GPL làm tăng rõ rệt khả năng chịu tải cơ và nhiệt của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn X-GPLRC. Hiện tượng snap-through chỉ xảy ra trong các trường hợp kết cấu chỏm cầu thoải chịu tác dụng của tải áp lực ngoài và không xảy ra với các trường hợp còn lại. Xu hướng đường cong sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn không hoàn hảo giống với xu hướng của kết cấu hoàn hảo trong Hình 3.20a, b và c. Trường hợp riêng biệt trên Hình 3.20d, xu hướng các đường cong

sau mất ổn định của kết cấu tấm tròn hoàn hảo và không hoàn hảo chịu tải nhiệt là khác nhau rất nhiều. Kết cấu tấm tròn hoàn hảo có thể quan sát được hiện tượng mất ổn định phân nhánh, trong khi kết cấu tấm tròn không hoàn hảo các đường cong sau mất ổn định lại xuất phát từ gốc.



Hình 3.20. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn X-GPLRC

Hình 3.21 thể hiện ảnh hưởng của sự tăng hệ số nền phi tuyến làm tăng mạnh khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải O-GPLRC và tấm tròn V-GPLRC. Với hệ số nền phi tuyến K_3 dương, các đường cong sau mất ổn định cơ và nhiệt của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn đều có xu hướng tăng lên đều đặn. Tuy nhiên, với hệ số nền phi tuyến K_3 âm, các đường cong này có xu hướng đi xuống ở vùng độ võng lớn.



Hình 3.21. Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải O-GPLRC và tấm tròn V-GPLRC

Với tỷ số hình học a / h lớn hơn tương ứng với kết cấu mỏng hơn dẫn đến cả độ bền cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn A-GPLRC đều giảm đáng kể (Hình 3.22). Trong trường hợp kết cấu chỏm cầu thoải A-GPLRC chịu tải áp lực ngoài (Hình 3.22a), cường độ snap-through tăng rõ rệt khi tỷ số a / h tăng. Ngoài ra, anh hưởng lớn của độ cong của vỏ có thể được quan sát trong Hình 3.22e và f. Độ cong của kết cấu chỏm cầu thoải càng lớn thì khả năng chịu tải sau mất ổn định của chúng càng lớn. Do đặc tính phi tuyến phức tạp, các xu hướng ngược lại xuất hiện trong phạm vi độ võng lớn khi kết cấu chịu tải áp lực ngoài (Hình 3.22e).



Hình 3.22. Ảnh hưởng của tỷ số a / h và a / R đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC

3.4.4. Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng

Xét kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng ngàm cố định xung quanh chu tuyến đặt trên nền đàn hồi hai hệ số chịu tải áp lực ngoài phân bố đều trên bề mặt và tải nhiệt tăng đều theo chiều dày (Hình 3.23). Sandwich FG-GPLRC lõi rỗng được xem xét với năm quy luật phân bố vật liệu của hai lớp phủ tạo ra năm loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng là: X-PC-X; O-PC-O, UD-PC-UD, V-PC-A, A-PC-V. Trong phần này tính chất hiệu dụng của sandwich FG-GPLRC lõi rỗng được lấy theo mục 1.3.5.





Ånh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL, độ rỗng, độ dày lõi và hệ số nền đến tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng với năm loại cấu trúc được khảo sát trong Bảng 3.8, Bảng 3.9, Bảng 3.10 và Bảng 3.11.

Bảng 3.8. Ånh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rõng ($a / h = 20, h = 0.03m, h_{pc} = h_{fs} = h/3, e_0 = 0.3, \xi = 0, K_1 = 10MN / m^3, K_2 = 0.5MN / m$)

$W^{*}_{GPL}ig(\%ig)$	V-PC-A	X-PC-X	UD-PC-UD	O-PC-O	A-PC-V
1	214.5271	198.8875	196.0500	194.3994	178.6217
2	240.6123	217.1617	212.2734	210.4066	186.5703
3	261.3063	233.0453	226.7070	224.8774	195.9621
5	294.5025	260.5149	252.6877	250.6367	215.4757
7	321.4739	284.1766	276.2405	273.2863	234.3501

Bảng 3.9. Ảnh hưởng của độ rỗng lõi đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng $(a / h = 20, h = 0.03m, h_{pc} = h_{fs} = h/3, \xi = 0,$ $W_{GPL}^* = 3\%, K_1 = 10MN / m^3, K_2 = 0.5MN / m)$

e_0	V-PC-A	X-PC-X	UD-PC-UD	O-PC-O	A-PC-V
0.1	249.3736	222.4308	216.7796	214.6439	187.0774
0.2	255.4817	227.8648	221.8666	219.8831	191.6269
0.3	261.3063	233.0453	226.7070	224.8774	195.9621
0.4	266.7865	237.9179	231.2514	229.5744	200.0376
0.5	271.8605	242.4278	235.4502	233.9213	203.8072

Bảng 3.10. Ảnh hưởng của độ dày lõi đến tải nhiệt tới hạn của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng $(a / h = 20, h = 0.03m, h_{fs} = (h - h_{pc})/2, \xi = 0, W_{GPL}^* = 3\%, K_1 = 10MN / m^3, K_2 = 0.5MN / m)$

$h_{pc}(\mathbf{m})$	V-PC-A	X-PC-X	UD-PC-UD	O-PC-O	A-PC-V
0.005	244.0107	212.2919	202.6234	198.2568	165.4138
0.01	261.3063	233.0453	226.7070	224.8774	195.9621
0.015	275.0139	253.2214	249.6890	249.2302	227.1180
0.02	280.0018	266.7105	265.5230	265.3055	251.9017

Bảng 3.11. Ảnh hưởng của hệ số nền đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng $(h=0.03m, h_{pc}=h_{fs}=h/3, \xi=0, W_{GPL}^*=3\%, e_0=0.3)$

	Cấu trúc vật		$K_1 = 10 \text{ MN/m}^3$,	$K_1 = 10 \text{ MN/m}^3$,
a / n	liệu	Không nên	$K_2 = 0 \mathrm{MN/m}$	$K_2 = 0.5$ MN/m
	UD-PC-UD	219.91	223.43 (1.60%)*	226.70 (3.09%)
	X-PC-X	225.96	229.64 (1.63%)	233.04 (3.13%)
20	V-PC-A	254.22	257.90 (1.45%)	261.30 (2.78%)
	A-PC-V	188.88	192.55 (1.94%)	195.96 (3.75%)
	O-PC-O	217.79	221.47 (1.69%)	224.87 (3.25%)
	UD-PC-UD	97.73	105.68 (8.13%)	108.94 (11.47%)
	X-PC-X	100.43	108.69 (8.22%)	112.10 (11.62%)
30	V-PC-A	112.98	121.26 (7.33%)	124.66 (10.34%)
	A-PC-V	83.94	92.21 (9.85%)	95.62 (13.91%)
	O-PC-O	96.79	105.07 (8.55%)	108.47 (12.07%)
	UD-PC-UD	54.97	69.09 (25.69%)	72.36 (31.64%)
	X-PC-X	56.49	71.19 (26.02%)	74.59 (32.04%)
40	V-PC-A	63.55	78.25 (23.13%)	81.66 (28.50%)
	A-PC-V	47.22	61.92 (31.13%)	65.32 (38.33%)
	O-PC-O	54.44	69.15 (27.02%)	72.55 (33.27%)

* Ảnh hưởng của nền đàn hồi so với trường hợp không có nền

Trong tất cả các trường hợp được khảo sát, tải nhiệt tới hạn lớn nhất đạt được với các cấu trúc V-PC-A, tiếp đến là các cấu trúc X-PC-X, UD-PC-UD, O-PC-O và nhỏ nhất là cấu trúc A-PC-V. Tất cả năm cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng đều được thiết kế đối xứng qua mặt giữa, trong những trường hợp này mặt giữa trùng với mặt trung hòa của kết cấu. Do đó, GPL càng được gia cường xa mặt giữa thì độ cứng của kết cấu càng lớn dẫn đến tải nhiệt tới hạn của kết cấu lớn hơn. Bảng 3.8, Bảng 3.9 và Bảng 3.10 cho thấy cả năm cấu trúc vật liệu, tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng tỷ lệ thuận với tỷ phần khối lượng GPL, độ rỗng và độ dày của lõi. Bảng 3.11 khảo sát tải nhiệt tới hạn của các kết cấu tấm tròn

sandwich FG-GPLRC lõi rỗng khi tham số hình học a/h thay đổi theo ba trường hợp hệ số nền. Tải nhiệt tới hạn tăng mạnh khi hệ số nền tăng. Tác dụng của nền đàn hồi tăng khi tỷ số a/h tăng và tác dụng của nền lớn nhất trong trường hợp kết cấu tấm tròn A-PC-V. Ngoài ra, khi tỷ số a/h tăng lên, nghĩa là khi tấm trở nên mỏng hơn, tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn sẽ giảm.

Kết quả khảo sát trong Hình 3.24 cho thấy khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải UD-PC-UD là lớn nhất trong phạm vi biến dạng nhỏ, ngược lại, trong phạm vi biến dạng lớn thì khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải V-PC-A chiếm ưu thế. Khả năng chịu tải nhiệt sau mất ổn định lớn nhất đạt được trong trường hợp tấm tròn V-PC-A và yếu nhất tương ứng với trường hợp A-PC-V. Kiểu mất ổn định cực trị được quan sát thấy trong trường hợp kết cấu chỏm cầu thoải chịu tải áp lực ngoài trong môi trường nhiệt, và kiểu mất ổn định phân nhánh thu được đối với kết cấu tấm tròn hoàn hảo chịu tải nhiệt.



Hình 3.24. Ảnh hưởng của quy luật phân bố GPL đến ứng xử cơ của chỏm cầu thoải
 và nhiệt của tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng sau mất ổn định

Tất cả các trường hợp khảo sát trong Hình 3.25 đều thể hiện ảnh hưởng rõ rệt của sự tăng 1% tỷ phần khối lượng GPL làm tăng mạnh khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng O-PC-O.

Hình 3.26 khảo sát ảnh hưởng của độ dày lõi rỗng h_{pc} và Hình 3.27 khảo sát ảnh hưởng của độ rỗng lớp lõi e_0 . Khi độ dày lõi rỗng hoặc độ rỗng tăng lên thì
đường cong q - W / h sau mất ổn định hạ thấp hơn đáng kể, nghĩa là độ dày lõi rỗng hoặc độ rỗng tăng lên làm giảm đáng kể khả năng chịu tải áp lực ngoài của kết cấu. Tuy nhiên, xu hướng ngược lại xảy ra đối với đường cong sau mất ổn định $\Delta T - W / h$ (Hình 3.26b, d và Hình 3.27b). Khi độ dày lõi rỗng hoặc độ rỗng tăng thì khả năng chịu tải nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn tăng lên tương tự với trường hợp tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn được khảo sát trong Bảng 3.9 và Bảng 3.10.



Hình 3.25. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn O-PC-O



Hình 3.26. Ảnh hưởng độ dày lớp lõi đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn X-PC-X



Hình 3.27. Ảnh hưởng của độ rỗng lõi đến ứng xử cơ của kết chỏm cầu thoải A-PC-V và nhiệt của tấm tròn A-PC-V sau mất ổn định

Tất cả các trường hợp được khảo sát trong Hình 3.28 đều cho thấy khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn hoàn hảo hoặc không hoàn hảo tỷ lệ nghịch với tỷ số hình học a / h. Ngoài ra, các đường cong cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu không hoàn hảo có dạng tương tự như trường hợp hoàn hảo, ngoại trừ trường hợp trên Hình 3.28d. Hình 3.28d có thể quan sát được dạng mất ổn định kiểu phân nhánh của kết cấu tấm tròn hoàn hảo dưới tác dụng của tải nhiệt trong khi đối với tấm tròn không hoàn hảo thì không xảy ra.



Hình 3.28. Ảnh hưởng của tỷ số a / h đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn V-PC-A

Hình 3.29 cho thấy độ cong của kết cấu chỏm cầu thoải UD-PC-UD càng lớn thì khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định của chúng càng lớn. Trong trường hợp chịu tải cơ, xu hướng ngược lại xuất hiện trong vùng độ võng lớn (Hình 3.29a).



Hình 3.29. Ảnh hưởng của tỷ số a / R đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn UD-PC-UD



Hình 3.30. Ảnh hưởng của hệ số nền đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn UD-PC-UD

Trong tất cả các trường hợp khảo sát trong Hình 3.30, bao gồm chỏm cầu thoải hoàn hảo và không hoàn hảo, tấm tròn hoàn hảo và không hoàn hảo, các đường cong cơ nhiệt sau mất ổn định của kết cấu tăng khi độ cứng đàn hồi của nền tăng. Khi độ cứng đàn hồi của nền tăng thì độ cứng chung của các kết cấu cũng tăng, do đó khả năng chịu tải của kết cấu cũng tăng.

3.5. Kết luận chương 3

Chương 3 đã giải quyết được một số vấn đề sau:

- Hệ phương trình chủ đạo cho bài toán ổn định tĩnh phi tuyến của kết cấu vỏ chỏm cầu thoải và tấm tròn đã được thiết lập dựa trên R3SDT, kết hợp với tính phi tuyến hình học theo nghĩa von Kármán. Các kết cấu này chịu tác động của tải áp lực ngoài phân bố đều và tải nhiệt tăng đều theo chiều dày. Bên cạnh đó, mô hình nền đàn hồi phi tuyến cũng được tích hợp vào hệ phương trình nhằm mô tả chính xác hơn sự tương tác giữa kết cấu và nền đàn hồi trong điều kiện tải trọng phức tạp.

- Bằng phương pháp tiếp cận theo chuyển vị, dạng nghiệm của các thành phần chuyển vị, góc xoay và độ không hoàn hảo của kết cấu được biểu diễn dưới dạng hàm đa thức, phù hợp với điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến. Việc lựa chọn dạng nghiệm này cho phép giảm bớt độ phức tạp của bài toán mà vẫn đảm bảo tính chính xác trong phân tích và đánh giá đáp ứng của kết cấu dưới tác động của tải trọng.

- Bằng cách áp dụng phương pháp Ritz, các biểu thức dạng hiển của tải nhiệt tới hạn gây mất ổn định cho kết cấu tấm tròn, cũng như mối quan hệ tải - độ võng trong giai đoạn sau mất ổn định phi tuyến của kết cấu vỏ chỏm cầu thoải và tấm tròn, đã được xác định.

- Kết quả khảo sát số cho thấy ứng xử ổn định cơ nhiệt của kết cấu tấm tròn và chỏm cầu thoải làm từ bốn loại vật liệu khác nhau đều có tính chất phức tạp. Đối với kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FGM rỗng các yếu tố hình học, độ rỗng, phân bố thể tích rỗng, nền đàn hồi tuyến tính và phi tuyến đều đóng vai trò quan trọng trong khả năng chịu tải và ứng xử sau mất ổn định. Đối với kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FGM lõi rỗng việc điều chỉnh các thông số như tỷ số hình học a / h, tỷ lệ thể tích k của lớp mặt FGM, độ rỗng lõi và hệ số nền có thể giúp tối ưu hóa thiết kế kết cấu để nâng cao khả năng chịu tải cơ và nhiệt sau mất ổn định. Đối với

kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC bản chất vật lý của FG-GPLRC có mô đun đàn hồi phụ thuộc mạnh vào sự phân bố và hình dạng kích thước của GPL cũng được thể hiện rõ cung cấp cơ sở cho việc tối ưu hóa thiết kế nhằm nâng cao khả năng chịu tải sau mất ổn định. Đối với kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng nghiên cứu đã xác định được các yếu tố quan trọng ảnh hưởng đến ứng xử ổn định đặc biệt là độ dày lõi rỗng và độ rỗng lõi ảnh hưởng lớn đến ứng xử sau mất ổn định của kết cấu. Những kết quả này cung cấp cơ sở khoa học quan trọng cho việc thiết kế và tối ưu hóa kết cấu trong điều kiện làm việc thực tế.

Chương 4. ÔN ĐỊNH PHI TUYẾN CỦA KẾT CẤU CHỎM CẦU THOẢI VÀ TẤM TRÒN FG-GPLRC RÕNG THEO FSDT VÀ PHƯƠNG PHÁP RITZ – TIẾP CẬN HÀM ỨNG SUẤT

Trong chương này, luận án tập trung xem xét kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sử dụng vật liệu FG-GPRLC rỗng. Đây là dạng kết cấu quan trọng có nhiều ưu điểm để áp dụng rộng rãi trong các công trình xây dựng. Bài toán ổn định phi tuyến của kết cấu này được xem xét một cách tổng quát nhiều yếu tố như điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến, tương tác với nền phi tuyến, môi trường nhiệt và hai loại tải trọng là áp lực ngoài và tải nhiệt.

Các phương trình chủ đạo được thiết lập dựa trên FSDT với tính phi tuyến hình học theo von Kármán và mô hình nền đàn hồi phi tuyến. Khác với các chương trước tiếp cận theo chuyển vị, bài toán này sẽ tiếp cận theo hàm ứng suất. Phương trình tương thích biến dạng được thiết lập và hàm ứng suất được đưa vào để đưa hệ phương trình chủ đạo về thành hệ ba phương trình đạo hàm riêng phi tuyến với ba ẩn hàm là độ võng, góc xoay và hàm ứng suất. Dạng nghiệm của độ võng, góc xoay và độ không hoàn hảo của kết cấu được biểu diễn dưới dạng hàm đa thức, phù hợp với điều kiện biên. Dạng nghiệm này thỏa mãn đồng thời sự cân bằng giữa độ phức tạp tính toán và độ tin cậy của phương pháp. Phương pháp năng lượng Ritz được áp dụng để nhận được hệ phương trình cân bằng dưới dạng đại số phi tuyến. Sau một số biến đổi toán học, thu được các biểu thức tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn và liên hệ sau mất ổn định giữa tải và độ võng của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn.

Ảnh hưởng của các thông số hình học, vật liệu, và nền đàn hồi phi tuyến tới ứng xử ổn định và sau mất ổn định của kết cấu cũng được khảo sát một cách chi tiết và đưa ra các nhận xét có ý nghĩa.

Nội dung chính của chương này đã được công bố 01 bài báo trên tạp chí JSTT thuộc danh mục Scopus của trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải (Bài báo số 8 trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả liên quan đến luận án).

4.1. Mô hình và các phương trình chủ đạo theo FSDT của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC rỗng

Xét kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn biến dạng đối xứng trục ngàm cố định xung quanh chu tuyến như Hình 4.1 với các thông số hình học: chiều dày h, bán kính

chính R và bán kính đáy a. Hệ tọa độ cực (φ, θ, z) được đặt ở mặt giữa kết cấu; trong đó z là trục hướng tâm vuông góc với mặt giữa, θ là tọa độ theo hướng chu vi và φ là tọa độ theo hướng kinh tuyến. Kết cấu chỏm cầu thoải được giả thiết có độ thoải lớn nên các phép tính gần đúng $\cos \varphi \approx 1$ và $Rd\varphi \approx dr$ được áp dụng. Hệ tọa độ (r, θ, z) với biến số $r = R \sin \varphi$ là bán kính vĩ tuyến được sử dụng thay thế nhằm đơn giản hóa quá trình tính toán.



Hình 4.1. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC rỗng

Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn đặt trên nền đàn hồi phi tuyến ba hệ số. Tải tác dụng lên kết cấu gồm tải áp lực ngoài q phân bố đều trên bề mặt và tải nhiệt ΔT tăng đều theo chiều dày kết cấu. Các phương trình lý thuyết và các phương trình quan hệ được thiết lập với trường hợp kết cấu chỏm cầu thoải, các phương trình và quan hệ của kết cấu tấm tròn thu được khi cho bán kính cong chính $R \rightarrow \infty$.Vật liệu FG-GPLRC rỗng được thiết kế với tỷ phần khối lượng GPL phân bố đều theo loại UD-GPLRC. Trong đó, tỷ phần thể tích rỗng phân bố theo ba loại khác nhau theo chiều dày kết cấu gồm: GF3D-O, GF3D-X và GF3D-U. Các tính chất hiệu dụng của FG-GPLRC rỗng được lấy theo mục 1.3.4.

Bài toán xem xét vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi, giả thiết các thành phần biến dạng nhỏ đảm bảo liên hệ giữa ứng suất và biến dạng là tuyến tính tuân theo định luật Hooke. Các thành phần phi tuyến hình học theo von Kármán được xét đến phù hợp với giả thiết độ võng lớn. Sử dụng FSDT để xây dựng các phương trình chủ đạo về ứng xử ổn định và sau mất ổn định phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải chịu tải áp lực ngoài và tải nhiệt tăng đều theo chiều dày kết cấu.

- *Phương trình quan hệ biến dạng – chuyển vị:* được thiết lập giống như các phương trình (2.5), (2.6), (2.7) trong mục 2.1.2 thuộc Chương 2 của luận án.

 - Phương trình quan hệ ứng suất – biến dạng: áp dụng định luật Hooke cho kết cấu chỏm cầu thoải chịu tác dụng của tải áp lực ngoài phân bố đều kết hợp với tải nhiệt tăng đều như sau:

$$\begin{cases} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{cases} - \begin{cases} \alpha(z)\Delta T \\ \alpha(z)\Delta T \end{cases} \}, \quad \sigma_{rz} = Q_{44}\varepsilon_{rz.}$$
(4.1)

trong đó ΔT là độ tăng nhiệt so với nhiệt độ phòng không có ứng suất nhiệt,

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - [v(z)]^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{E(z)v(z)}{1 - [v(z)]^2}, \quad Q_{44} = \frac{E(z)}{2[1 + v(z)]}.$$
(4.2)

- Phương trình lực giãn, mô men và lực cắt: các nội lực gồm lực giãn, mô men và lực cắt của kết cấu chỏm cầu thoải được tính bằng phương trình (2.10) trong mục
 2.1.2 thuộc Chương 2 của luận án.

Thay thế phương trình (2.6) vào phương trình (4.1), sau đó thay thế các phương trình kết quả vào phương trình (2.10) thu được kết quả dưới dạng như sau:

$$\begin{cases} N_{r} \\ N_{\theta} \\ M_{r} \\ M_{\theta} \\ Q_{r} \end{cases} = \begin{cases} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} & 0 \\ B_{11} & B_{12} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{s}H_{44} \end{cases} \begin{cases} \varepsilon_{r}^{0} \\ \varepsilon_{\theta}^{0} \\ \chi_{r} \\ \chi_{\theta} \\ \psi + w_{,r} \end{cases} - \begin{cases} \Phi_{1r} \\ \Phi_{1\theta} \\ \Phi_{2r} \\ \Phi_{2\theta} \\ 0 \end{cases} \Delta T,$$
(4.3)

trong đó hệ số hiệu chỉnh trượt theo FSDT được chọn theo giá trị phổ biến $K_s = 5 / 6$,

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) Q_{ij} dz \text{ với } \mathbf{i}\mathbf{j} = 11, 12, 21, 22, \qquad (4.4)$$

$$\Phi_{1r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z) dz, \quad \Phi_{2r} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z) z dz,$$

$$\Phi_{1\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{21} + Q_{22}) \alpha(z) dz, \quad \Phi_{2\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{21} + Q_{22}) \alpha(z) z dz, \quad H_{44} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} dz.$$
(4.5)

Từ phương trình (4.3) thực hiện biến đổi để thu được biểu thức của các thành phần biến dạng theo các thành phần lực giãn như sau:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{r}^{0} \\ \varepsilon_{\theta}^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{*} N_{r} + B_{11}^{*} \chi_{r} + B_{12}^{*} \chi_{\theta} + A_{12}^{*} N_{\theta} - \Delta T \Phi_{1r}^{*} \\ A_{21}^{*} N_{r} + B_{21}^{*} \chi_{r} + B_{22}^{*} \chi_{\theta} + A_{22}^{*} N_{\theta} - \Delta T \Phi_{1\theta}^{*} \end{bmatrix}$$
(4.6)

trong đó:

$$\begin{aligned} A_{11}^{*} &= \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, A_{12}^{*} = -\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, B_{11}^{*} = \frac{\left(A_{12}B_{21} - A_{22}B_{11}\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \\ B_{12}^{*} &= \frac{\left(A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12}\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, A_{21}^{*} = -\frac{A_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, A_{22}^{*} = \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \\ B_{21}^{*} &= -\frac{\left(A_{11}B_{21} - A_{21}B_{11}\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, B_{22}^{*} = -\frac{\left(A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12}\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \\ B_{1r}^{*} &= -\frac{\left(-A_{12}\Phi_{10} + A_{22}\Phi_{1r}\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \Phi_{10}^{*} = \frac{\left(-A_{11}\Phi_{10} + A_{21}\Phi_{1r}\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \end{aligned}$$

Tiếp theo thay biểu thức (4.6) và phương trình (4.3) và thực hiện biến đổi để nhận được biểu thức của mô men theo lực giãn như sau:

$$\begin{bmatrix} M_r \\ M_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^* N_r + D_{11}^* \chi_r + D_{12}^* \chi_\theta + C_{12}^* N_\theta - \Delta T \Phi_{2r}^* \\ C_{21}^* N_r + D_{21}^* \chi_r + D_{22}^* \chi_\theta + C_{22}^* N_\theta - \Delta T \Phi_{2\theta}^* \end{bmatrix}$$
(4.7)

trong đó:

$$C_{11}^{*} = B_{11}A_{11}^{*} + B_{12}A_{21}^{*}, C_{12}^{*} = B_{11}A_{12}^{*} + B_{12}A_{22}^{*}, D_{11}^{*} = B_{11}B_{11}^{*} + B_{12}B_{21}^{*} + D_{11},$$

$$D_{12}^{*} = B_{11}B_{12}^{*} + B_{12}B_{22}^{*} + D_{12}, C_{21}^{*} = B_{21}A_{11}^{*} + B_{22}A_{21}^{*}, C_{22}^{*} = B_{21}A_{12}^{*} + B_{22}A_{22}^{*},$$

$$D_{21}^{*} = B_{21}B_{11}^{*} + B_{22}B_{21}^{*} + D_{21}, D_{22}^{*} = B_{21}B_{12}^{*} + B_{22}B_{22}^{*} + D_{22},$$

$$\Phi_{2r}^{*} = B_{11}\Phi_{1r}^{*} + B_{12}\Phi_{10}^{*} + \Phi_{2r}, \Phi_{20}^{*} = B_{21}\Phi_{1r}^{*} + B_{22}\Phi_{10}^{*} + \Phi_{20}.$$

- *Phương trình tương thích biến dạng:* phương trình tương thích biến dạng của kết cấu chỏm cầu thoải FG-GPLRC rỗng có xét đến độ không hoàn hảo ban đầu là:

$$\frac{1}{r}\varepsilon_{r,r}^{0} - \frac{2}{r}\varepsilon_{\theta,r}^{0} - \varepsilon_{\theta,rr}^{0} = \frac{w_{,rr}}{R} + \frac{1}{r}\left(\frac{w_{,r}}{R} + w_{,r}w_{,rr} + w_{,r}w_{,rr}^{*} + w_{,rr}w_{,r}^{*}\right) \quad (4.8)$$

Hàm ứng suất f(r) được xác định thỏa mãn điều kiện sau:

$$N_r = \frac{f_{,r}}{r}, \quad N_\theta = f_{,rr} \tag{4.9}$$

Vật liệu FG-GPLRC rỗng có cơ tính đối xứng qua mặt giữa của kết cấu, thay biểu thức (4.9) vào (4.6) thu được biểu thức của các thành phần biến dạng theo hàm ứng suất, sau đó thay kết quả vào phương trình tương thích biến dạng (4.8) trở thành:

$$-A_{22}^{*}f_{,rrrr} + \left(A_{12}^{*} - A_{21}^{*} - 2A_{22}^{*}\right)\frac{f_{,rrr}}{r} + A_{11}^{*}\frac{f_{,rr}}{r^{2}} - A_{11}^{*}\frac{f_{,r}}{r^{3}}$$

$$= \frac{w_{,rr}}{R} + \frac{1}{r}\left(\frac{w_{,r}}{R} + w_{,r}w_{,rr} + w_{,r}w_{,rr}^{*} + w_{,rr}w_{,r}^{*}\right)$$
(4.10)

Tiếp theo, thay biểu thức (4.9) vào (4.7) thu được biểu thức của mô men:

$$M_{r} = \frac{f_{,r}C_{11}^{*}}{r} + D_{11}^{*}\chi_{r} - \Delta T\Phi_{2r}^{*} + D_{12}^{*}\chi_{\theta} + C_{12}^{*}f_{,rr},$$

$$M_{\theta} = \frac{f_{,r}C_{21}^{*}}{r} + D_{21}^{*}\chi_{r} - \Delta T\Phi_{2\theta}^{*} + D_{22}^{*}\chi_{\theta} + C_{22}^{*}f_{,rr}$$
(4.11)

4.2. Điều kiện biên và xác định hàm ứng suất

Kết cấu chỏm cầu thoải FG-GPLRC rỗng biến dạng đối xứng trục có điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến được thể hiện bằng phương trình như sau:

$$r = 0: \ \psi = 0, \quad f_{,r} = N_r r = 0,$$

$$r = a: \ w = 0, \quad \psi = 0, \quad N_r = Q_0,$$
(4.12)

trong đó Q_0 là phản lực nén tại cạnh biên kết cấu do bị ngàm cố định.

Dựa vào điều kiện biên (4.12), dạng nghiệm gần đúng cho độ võng và góc quay được đưa ra là:

$$w = W \frac{(a^2 - r^2)^2}{a^4}, \quad \psi = \Psi \frac{r(a^2 - r^2)}{a^3}$$
 (4.13)

trong đó: W và Ψ lần lượt là biên độ của độ võng w và góc quay ψ .

Hàm độ không hoàn hảo ban đầu w^* được giả định có dạng tương tự độ võng của kết cấu như sau:

$$w^* = W^* \frac{\left(a^2 - r^2\right)^2}{a^4}, \qquad (4.14)$$

trong đó: W^* là biên độ của hàm độ không hoàn hảo ban đầu w^* .

Thay thế w và w^* trong phương trình (4.13) và (4.14) vào phương trình tương thích biến dạng (4.10) thu được:

$$-A_{22}^{*}f_{,rrrr} + \left(A_{12}^{*} - A_{21}^{*} - 2A_{22}^{*}\right)\frac{f_{,rrr}}{r} + A_{11}^{*}\frac{f_{,rr}}{r^{2}} - A_{11}^{*}\frac{f_{,r}}{r^{3}} = \frac{\left(48W^{2} + 96WW^{*}\right)}{a^{8}}r^{4} - \left(\frac{64W^{2} + 128WW^{*}}{a^{6}} - \frac{16W}{a^{4}R}\right)r^{2} + \left(\frac{16W^{2} + 32WW^{*}}{a^{4}} - \frac{8W}{a^{2}R}\right)$$

$$(4.15)$$

Dựa vào mối tương quan toán học giữa vế trái và vế phải của phương trình (4.15), hàm ứng suất được xác định như sau:

$$f_{,r} = Y_1 r^7 + Y_2 r^5 + Y_3 r^3 + Y_4 r^2 + Y_5 r + C$$
(4.16)

trong đó:

$$Y_{1} = Y_{11}W^{2} + Y_{12}WW^{*},$$

$$Y_{2} = Y_{21}W^{2} + Y_{22}WW^{*} + Y_{23}W,$$

$$Y_{3} = Y_{31}W^{2} + Y_{32}WW^{*} + Y_{33}W,$$

$$Y_{4} = 0,$$
vói:

$$Y_{11} = \frac{8}{a^{8}(A_{11}^{*} + 7A_{12}^{*} - 7A_{21}^{*} - 49A_{22}^{*})},$$

$$Y_{12} = \frac{16}{a^{8}(A_{11}^{*} + 7A_{12}^{*} - 7A_{21}^{*} - 49A_{22}^{*})},$$

$$Y_{21} = -\frac{16}{a^{6}(A_{11}^{*} + 5A_{12}^{*} - 5A_{21}^{*} - 25A_{22}^{*})},$$

$$Y_{22} = -\frac{32}{a^{6}(A_{11}^{*} + 5A_{12}^{*} - 5A_{21}^{*} - 25A_{22}^{*})},$$

$$Y_{23} = -\frac{32}{a^{6}(A_{11}^{*} + 5A_{12}^{*} - 5A_{21}^{*} - 25A_{22}^{*})},$$

$$Y_{24} = -\frac{32}{a^{6}(A_{11}^{*} + 5A_{12}^{*} - 5A_{21}^{*} - 25A_{22}^{*})},$$

$$Y_{25} = -\frac{32}{a^{6}(A_{11}^{*} + 5A_{12}^{*} - 5A_{21}^{*} - 25A_{22}^{*})},$$

$$Y_{23} = \frac{4}{a^4 R \left(A_{11}^* + 5A_{12}^* - 5A_{21}^* - 25A_{22}^*\right)}, \quad Y_{31} = \frac{8}{a^4 \left(A_{11}^* + 3A_{12}^* - 3A_{21}^* - 9A_{22}^*\right)},$$
$$Y_{32} = \frac{16}{a^4 \left(A_{11}^* + 3A_{12}^* - 3A_{21}^* - 9A_{22}^*\right)}, \quad Y_{33} = -\frac{4}{a^2 R \left(A_{11}^* + 3A_{12}^* - 3A_{21}^* - 9A_{22}^*\right)},$$

Hằng số C và Y_5 được xác định dựa vào biểu thức điều kiện biên (4.12):

- Tại
$$r = 0$$
, $f_{,r} = 0$ phương trình (4.16) dẫn tới:
 $C = 0$
(4.18)
- Tại $r = q$, $N = \frac{f_{,r}}{f_{,r}} = Q$, phương trình (4.16) dẫn tới:

Tại
$$r = a$$
, $N_r = \frac{J_{,r}}{r} = Q_0$ phương trình (4.16) dẫn tới:
 $Y_5 = Y_{51}W^2 + Y_{52}W + Y_{53}WW^* + Q_0$, (4.19)
g đó:

trong đó:

$$Y_{51} = -\frac{1}{a^2} \left[\frac{8}{\left(A_{11}^* + 7A_{12}^* - 7A_{21}^* - 49A_{22}^*\right)} - \frac{16}{\left(A_{11}^* + 5A_{12}^* - 5A_{21}^* - 25A_{22}^*\right)} + \frac{8}{\left(A_{11}^* + 3A_{12}^* - 3A_{21}^* - 9A_{22}^*\right)} \right],$$

$$Y_{52} = \frac{4}{R\left(A_{11}^* + 3A_{12}^* - 3A_{21}^* - 9A_{22}^*\right)} - \frac{4}{R\left(A_{11}^* + 5A_{12}^* - 5A_{21}^* - 25A_{22}^*\right)},$$

$$Y_{53} = -\frac{1}{a^2} \left[\frac{16}{\left(A_{11}^* + 7A_{12}^* - 7A_{21}^* - 49A_{22}^*\right)} - \frac{32}{\left(A_{11}^* + 5A_{12}^* - 5A_{21}^* - 25A_{22}^*\right)} + \frac{16}{\left(A_{11}^* + 3A_{12}^* - 3A_{21}^* - 9A_{22}^*\right)} \right],$$

và Q_0 được xác định bằng điều kiện chuyển vị của cạnh kết cấu trong mặt phẳng đáy theo hướng vuông góc $\Delta = 0$ theo nghĩa trung bình:

$$\Delta = -\frac{1}{2\pi a^2} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{a} u_{,r} r dr d\theta = 0.$$
(4.20)

Thay phương trình (2.7) vào (4.3) rồi kết hợp với phương trình (4.9) thu được:

$$u_{,r} = U_1 r^6 + U_2 r^4 + U_3 r^2 + U_4, \qquad (4.21)$$

trong đó:

$$\begin{split} U_1 &= U_{11}W^2 + U_{12}W^*W, \quad U_2 = U_{21}W^2 + U_{22}W^*W + U_{23}W, \\ U_3 &= U_{31}W^2 + U_{32}W^*W + U_{33}W + U_{34}\Psi, \\ U_4 &= U_{41}W^2 + U_{42}W^*W + U_{43}W + U_{44}Q_0 + U_{45}\Delta T + U_{46}\Psi, \\ \text{với:} \end{split}$$

$$\begin{split} U_{11} &= \frac{7a^8A_{12}Y_{11} + 8A_{22}A_{11} - 8A_{21}A_{12} - a^8Y_{11}A_{22}}{-a^8A_{22}A_{11} + a^8A_{21}A_{12}},\\ U_{12} &= \frac{7a^8Y_{12}A_{12} + 16A_{22}A_{11} - 16A_{21}A_{12} - a^8A_{22}Y_{12}}{-a^8A_{22}A_{11} + a^8A_{21}A_{12}},\\ U_{21} &= \frac{5a^6Y_{21}A_{12} - 16A_{11}A_{22} + 16A_{21}A_{12} - a^6A_{22}Y_{21}}{-a^6A_{22}A_{11} + a^6A_{21}A_{12}},\\ U_{22} &= \frac{5a^6Y_{22}A_{12} - 32A_{11}A_{22} + 32A_{21}A_{12} - a^6A_{22}Y_{22}}{-a^6A_{11}A_{22} + a^6A_{12}A_{21}}, \end{split}$$

$$\begin{split} U_{23} &= \frac{5A_{12}Y_{23} - A_{22}Y_{23}}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} + \frac{A_{21}A_{12} - A_{11}A_{22}}{a^4R(A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22})}, \\ U_{31} &= \frac{(3Y_{31}A_{12} - A_{22}Y_{31}) + 8A_{11}A_{22} - 8A_{21}A_{12}}{(-A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21})}, \\ U_{32} &= \frac{(6Y_{32}A_{12} - 2A_{22}Y_{32}) + 32(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})}{(-2A_{11}A_{22} + 2A_{12}A_{21})}, \\ U_{33} &= \frac{3A_{12}Y_{33} - A_{22}Y_{33}}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} + \frac{2A_{11}A_{22} - 2A_{21}A_{12}}{a^2(A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22})R}, \\ U_{34} &= \frac{2A_{12}(3B_{21} + B_{22}) - 6A_{22}B_{11} - 2A_{22}B_{12}}{a^3(-2A_{11}A_{22} + 2A_{12}A_{21})}, \\ U_{41} &= \frac{A_{12}Y_{51} - A_{22}Y_{51}}{-A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}}, \qquad U_{42} &= \frac{A_{12}Y_{53} - A_{22}Y_{53}}{-A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}}, \\ U_{43} &= \frac{A_{12}Y_{52} - A_{22}Y_{52}}{-A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}} + \frac{1}{R}, \quad U_{44} &= \frac{A_{12} - A_{22}}{-A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}}, \\ U_{45} &= \frac{A_{12}\Phi_{10} - A_{22}\Phi_{1r}}{-A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}}, \qquad U_{46} &= \frac{2(-B_{21} - B_{22})A_{12} + 2A_{22}B_{11} + 2A_{22}B_{12}}{a(-2A_{11}A_{22} + 2A_{12}A_{21})}. \end{split}$$

Thay phương trình (4.21) vào phương trình (4.20) rồi giải phương trình kết quả thu được:

$$Q_{0} = \frac{1}{12U_{44}} \Big[-\Big(4U_{23}a^{4} + 6U_{33}a^{2} + 12U_{43}\Big)W \\ -\Big(3U_{11}a^{6} + 4U_{21}a^{4} + 6U_{31}a^{2} + 12U_{41}\Big)W^{2} \\ -\Big(3a^{6}U_{12} + 4U_{22}a^{4} + 6a^{2}U_{32} + 12U_{42}\Big)WW^{*} \\ -\Big(6U_{34}a^{2} + 12U_{46}\Big)\Psi - 12U_{45}\Delta T \Big].$$

$$(4.22)$$

4.3. Phương pháp năng lượng Ritz

Thế năng biến dạng nhiệt đàn hồi của kết cấu chỏm cầu thoải biến dạng đối xứng trục được tính bằng công thức (3.9) trong mục 3.1.3 thuộc Chương 3 của luận án. Kết hợp các phương trình (2.6), (2.10) và (3.9) thu được:

$$U_{\text{int}} = \pi \int_{0}^{a} \left[\left(N_{r} \varepsilon_{r}^{0} + M_{r} \chi_{r} \right) + \left(N_{\theta} \varepsilon_{\theta}^{0} + M_{\theta} \chi_{\theta} \right) + Q_{r} \left(\psi + w_{,r} \right) \right] r dr$$

$$- \Delta T \pi \int_{0}^{a} \left(\Phi_{1r} \varepsilon_{r}^{0} + \Phi_{2r} \chi_{r} + \Phi_{1\theta} \varepsilon_{\theta}^{0} + \Phi_{2\theta} \chi_{\theta} \right) r dr$$

$$(4.23)$$

Công do ngoại lực thực hiện xét đến sự tương tác với nền đàn hồi phi tuyến ba hệ số được tính bằng công thức (3.11) trong mục 3.1.3 thuộc Chương 3 của luận án.

Từ phương trình (4.23) và (3.11) năng lượng toàn phần thu được là:

$$U_{Total} = U_{int} - U_{ext} \tag{4.24}$$

Thay các phương trình (4.6), (4.7), (4.9), (4.13), (4.16) và (4.22) vào phương trình năng lượng toàn phần (4.24) rồi áp dụng phương pháp Ritz như sau:

$$\frac{\partial U_{Total}}{\partial \Psi} = 0, \, v\dot{a}$$
(4.25)

$$\frac{\partial U_{Total}}{\partial W} = 0 \tag{4.26}$$

Giải phương trình (4.25) thu được biểu thức của Ψ như sau:

$$\Psi = -M_1 W^2 + M_2 W W^* + M_3 W + M_4 \Delta T$$
(4.27)

trong đó M_i ($i = 1 \rightarrow 4$) được trình bày cụ thể trong phụ lục A3.

Thay phương trình (4.27) vào (4.26) thu được phương trình kết quả thể hiện mối liên hệ giữa tải áp lực ngoài q, tải nhiệt ΔT và biên độ độ võng W như sau:

$$(C_{1} - N_{1}K_{3})W^{3} + (C_{2}W^{*} + C_{3})W^{2} + [C_{4}(W^{*})^{2} + C_{5}W^{*} + C_{6}\Delta T + C_{7} - N_{2}K_{1} - N_{3}K_{2}]W + C_{8}\Delta TW^{*} + C_{9}\Delta T - N_{4}q = 0.$$
(4.28)

trong đó C_i $(i = 1 \rightarrow 9)$ và N_j $(j = 1 \rightarrow 4)$ được trình bày cụ thể trong phụ lục A4.

Phương trình (4.28) được sử dụng để phân tích ứng xử ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải và kết cấu tấm tròn (khi $R \rightarrow \infty$) FG-GPLRC rỗng. Từ phương trình này các biểu thức quan hệ sau mất ổn định của tải cơ và tải nhiệt với biên độ độ võng của kết cấu thu được là:

$$q = \frac{1}{N_4} \Big[(C_1 - K_3 N_1) W^3 + (C_2 W^* + C_3) W^2 + (C_4 (W^*)^2 + C_5 W^* + C_6 \Delta T + C_7 - K_1 N_2 - K_2 N_3) W + C_8 \Delta T W^* + C_9 \Delta T \Big],$$

$$\Delta T = -\frac{1}{C_6 W + C_8 W^* + C_9} \Big[(C_1 - K_3 N_1) W^3 + (C_2 W^* + C_3) W^2 + (C_4 (W^*)^2 + C_5 W^* + C_7 - K_1 N_2 - K_2 N_3) W - N_4 q \Big].$$
(4.29)
$$(4.30)$$

Đối với tấm tròn hoàn hảo $(W^* = 0, R \to \infty)$, tải nhiệt tới hạn theo tiêu chuẩn mất ổn định phân nhánh được xác định khi cho $W \to 0$ ở phương trình (4.30) thu được:

$$\Delta T_{cr} = -\frac{C_7 - K_1 N_2 - K_2 N_3}{C_6}.$$
(4.31)

Hiện tượng mất ổn định phân nhánh không xảy ra với kết cấu chỏm cầu thoải.

Luận án sử dụng phần mềm Maple và Excel để thực hiện khảo sát số cho kết cấu tấm tròn và chỏm cầu thoải ứng dụng kết quả lý thuyết đã nhận được ở dạng hiển. 4.4. Ứng dụng kết quả tính toán lý thuyết phân tích ổn định phi tuyến kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn FG-GPLRC rỗng

4.4.1. Nghiên cứu so sánh

Để kiếm chứng tính chính xác và độ tin cậy của phương pháp, luận án đã so sánh kết quả về tải nhiệt tới hạn của kết cấu tấm tròn hoàn hảo sandwich FG-GPLRC lõi rỗng với kết quả trong nghiên cứu của Vũ Hoài Nam và cộng sự [85]. Trong nghiên cứu này, Vũ Hoài Nam và cộng sự áp dụng phương pháp tiếp cận dựa trên chuyển vị, phương trình cơ bản thiết lập theo FSDT, sử dụng nghiệm lượng giác và phương pháp Galerkin. Kết quả so sánh trong Bảng 4.1 cho thấy độ tương đồng cao giữa hai phương pháp, với sai lệch lớn nhất chỉ 2.3701% khi độ rỗng lõi đạt 0.8. Điều này khẳng định tính chính xác của phương pháp được đề xuất trong luận án.

Bảng 4.1. So sánh tải nhiệt tới hạn của tấm tròn hoàn hảo sandwich FG-GPLRC (UD-PC-UD) với kết quả của Vũ Hoài Nam và cộng sự [85] (h = 0.027m, a = 35h, q = 0MPa , $R = \infty$, $K_1 = 8MN / m^3$, $K_2 = 0.2MN / m$, $K_3 = 0MN / m^5$, $W^* = 0$, $W_{GPL}^* = 2\%$, mode m = 1)

$e_{_0}$	Luận án	Vũ Hoài Nam và cộng sự [85]	Sai số (%)
0.2	68.9535	69.3236	0.5367
0.4	72.0065	72.5838	0.8017
0.6	74.2311	75.3874	1.5577
0.8	76.7919	77.5883	2.3701

4.4.2. Phân tích tải nhiệt tới hạn của tấm tròn FG-GPLRC rỗng

Bảng 4.2 trình bày sự thay đổi của tải nhiệt tới hạn đối với các tấm tròn GF3D-O, GF3D-X và GF3D-U khi độ rỗng và tỷ phần khối lượng của GPL tăng lên. Kết quả cho thấy tải nhiệt tới hạn tấm tròn GF3D-O tăng đáng kể khi độ rỗng tăng, tải nhiệt tới hạn tấm tròn GF3D-X giảm đáng kể khi độ rỗng tăng, tải nhiệt tới hạn tấm tròn GF3D-U không thay đổi theo độ rỗng. Khi độ rỗng không đổi, tải nhiệt tới hạn của cả ba loại tấm tròn đều tăng rõ rệt theo tỷ phần khối lượng GPL. Ngoài ra, với cùng độ rỗng và tỷ phần khối lượng GPL, tấm tròn GF3D-O có tải nhiệt tới hạn cao nhất, trong khi tấm tròn GF3D-X có giá trị thấp nhất.

Bảng 4.2. Ảnh hưởng của độ rỗng, loại phân bố rỗng, tỷ phần khối lượng GPL đến tải nhiệt tới hạn $\Delta T_{cr}(K)$ của tấm tròn hoàn hảo FG-GPLRC rỗng (h = 0.015m,

e _o	$W^{*}_{GPL}(\%)$	GF3D-U	GF3D-X	GF3D-O
0.1	2	25.43818927	24.14717231	26.18305686
	4	28.09727090	26.67116372	28.92014047
	6	30.61747114	29.06350250	31.51399238
0.3	2	25.43820709	21.10673482	28.02415919
	4	28.09733677	23.31263916	30.95361612
	6	30.61754302	25.40359851	33.73020175
0.5	2	25.43807384	17.40913970	30.55177877
	4	28.09729979	19.22865662	33.74587558
	6	30.61741646	20.95280862	36.77294942

a = 35h, q = 0MPa, $R = \infty, W^* = 0, K_1 = 0$ MN / $m^3, K_2 = 0$ MN / $m, K_3 = 0$ MN / m^5)

4.4.3. Ứng sử sau mất ổn định của chỏm cầu thoải FG-GPLRC rỗng

Ånh hưởng của các loại phân bố rỗng GF3D-O, GF3D-X và GF3D-U đến đường cong sau mất ổn định $q \sim W/h$ và $\Delta T \sim W/h$ của kết cấu chỏm cầu thoải FG-GPLRC rỗng được thể hiện trong Hình 4.2. Khả năng chịu tải sau mất ổn định của chỏm cầu thoải GF3D-O đạt giá trị cao nhất, trong khi chỏm cầu thoải GF3D-X có khả năng chịu tải thấp nhất. Tuy nhiên, sự khác biệt giữa các loại phân bố rỗng được thể hiện rõ rệt trong trường hợp tải cơ, nhưng không đáng kể đối với tải nhiệt. Hình 4.3 trình bày ảnh hưởng của độ rỗng lên các đường cong sau mất ổn định cơ và nhiệt của kết cấu chỏm cầu thoải GF3D-O. Có thể quan sát thấy sự gia tăng độ rỗng làm giảm các đường cong $q \sim W/h$ và nâng cao các đường cong $\Delta T \sim W/h$. Khi độ rỗng tăng lên, khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định giảm đáng kể, trong khi khả năng chịu tải nhiệt sau mất ổn định tăng nhẹ.



Hình 4.2. Ảnh hưởng của loại phân bố thể tích rỗng đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải FG-GPLRC rỗng



Hình 4.3. Ảnh hưởng của độ rỗng đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải GF3D-O

Hình 4.4 cho thấy khả năng chịu tải cơ và tải nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải GF3D-O tăng mạnh khi tổng tỷ phần khối lượng GPL tăng. Ảnh hưởng của tỷ số hình học a / h trong trường hợp tải cơ được nghiên cứu trên Hình 4.5. Khi tỷ

số hình học a / h tăng lên, khả năng chịu tải cơ sau mất ổn định giảm mạnh cùng với cường độ snap-through tăng đáng kể với kết cấu chỏm cầu thoải GF3D-U. Ảnh hưởng của sự không hoàn hảo lên các đường cong sau mất ổn định của chỏm cầu thoải GF3D-O được xem xét trong Hình 4.6 cho thấy, tại vùng độ võng nhỏ, đường cong sau mất ổn định có xu hướng thấp hơn khi độ không hoàn hảo tăng lên. Tuy nhiên, thứ tự này bị đảo ngược tại vùng độ võng lớn sau khi các đường cong dường như giao nhau tại một điểm nhất định, tương ứng với các độ không hoàn hảo khác nhau.



Hình 4.4. Ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải GF3D-O



Hình 4.5. Ảnh hưởng của tỷ số a / h
đến ứng xử cơ sau mất ổn định của
chỏm cầu thoải GF3D-U



Hình 4.6. Ảnh hưởng của độ không hoàn hảo ban đầu đến ứng xử cơ sau mất ổn định của chỏm cầu thoải GF3D-O



Hình 4.7. Ảnh hưởng của hệ số nền K_1, K_2 đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải GF3D-O.



Hình 4.8. Ảnh hưởng của hệ số nền K_3 đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của chỏm cầu thoải GF3D-O

Những ảnh hưởng đáng chú ý của các hệ số nền K_1, K_2 đến ứng xử cơ và nhiệt sau mất ổn định của các kết cấu chỏm cầu thoải GF3D-O được khảo sát trong Hình 4.7. Các kết quả số cho thấy khả năng chịu tải sau mất ổn định của chỏm cầu thoải GF3D-O tăng lên đáng kể khi các hệ số nền tuyến tính K_1, K_2 tăng. Đặc biệt, có thể quan sát thấy rằng hiện tượng snap-through giảm rõ rệt khi các hệ số nền tuyến tính tăng lên.

Ảnh hưởng của hệ số nền phi tuyến đối với các trường hợp nền hóa cứng và nền hóa mềm được phân tích trong Hình 4.8. Kết quả cho thấy, đối với nền hóa cứng, các đường cong sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải GF3D-O có xu hướng đi lên đều đặn. Ngược lại, đối với nền hóa mềm, các đường cong sau mất ổn định có xu hướng đi xuống đều đặn ở vùng có độ võng lớn. Sự khác biệt này phản ánh tác động của tính chất nền đến ứng xử sau mất ổn định của kết cấu.

4.5. Kết luận chương 4

Chương 4 đã giải quyết được một số vấn đề sau:

- Thiết lập hệ phương trình chủ đạo cho bài toán ổn định phi tuyến của kết cấu vỏ chỏm cầu thoải và tấm tròn theo FSDT có xét đến tính phi tuyến hình học của von Kármán. Kết cấu chịu tải áp lực ngoài phân bố đều và tải nhiệt tăng đều theo chiều dày. Tương tác giữa nền và vỏ được mô tả bằng mô hình nền đàn hồi phi tuyến với ba hệ số.

- Theo cách tiếp cận theo hàm ứng suất, dạng nghiệm độ võng, góc xoay và độ không hoàn hảo của kết cấu vỏ chỏm cầu thoải và tấm tròn được biểu diễn dưới dạng hàm đa thức, phù hợp với điều kiện biên ngàm cố định quanh chu tuyến. Dạng nghiệm này thỏa mãn đồng thời sự cân bằng giữa độ phức tạp tính toán và độ tin cậy của phương pháp.

- Các biểu thức tải nhiệt tới hạn của tấm tròn và biểu thức quan hệ giữa tải - độ võng trong giai đoạn sau mất ổn định phi tuyến của chỏm cầu thoải và tấm tròn được xác định dưới dạng hiển thông qua việc áp dụng phương pháp Ritz.

- Kết quả khảo sát cho thấy những nhận xét nổi bật về ảnh hưởng của độ rỗng và tỷ phần khối lượng GPL đến tải nhiệt tới hạn của tấm tròn, cũng như tác động của các thông số vật liệu và hình học đến ứng xử sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải. Ngoài ra, nghiên cứu cũng phân tích ảnh hưởng của độ không hoàn hảo và hệ số nền đối với ứng xử sau mất ổn định của kết cấu chỏm cầu thoải. Những kết quả này cung cấp cái nhìn sâu sắc về ảnh hưởng của các tham số thiết kế đến ổn định và ứng xử sau mất ổn định của kết cấu thoải và tấm tròn FG-GPLRC rỗng, từ đó hỗ trợ tối ưu hóa vật liệu và hình học trong thiết kế kết cấu này.

KÉT LUÂN

Luận án đã thu được một số kết quả mới sau đây:

1. Theo tiếp cận theo chuyển vị, dựa trên FSDT và tính phi tuyến hình học của von Kármán, các phương trình chủ đạo của bài toán ổn định phi tuyến của kết cấu vỏ chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn đã được thiết lập. Trong đó, mô hình nền đàn hồi phi tuyến ba hệ số được được áp dụng để mô tả tương tác giữa nền và kết cấu, đồng thời xét đến tác động của tải áp lực ngoài và tải nhiệt tăng đều. Dạng nghiệm lượng giác được lựa chọn để xem xét được đồng thời nhiều mode mất ổn định khác nhau. Sử dụng phương pháp Galerkin để nhận được các biểu thức tải tới hạn và liên hệ tải - độ võng sau mất ổn định cho bài toán ổn định của kết cấu vỏ chỏm thoải có độ cong phức tạp và tấm tròn làm từ vật liệu FG-GPLRC rỗng và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng.

2. Theo tiếp cận theo chuyển vị, dựa trên R3SDT, tính phi tuyến hình học của von Kármán, luận án đã thiết lập các phương trình chủ đạo của bài toán ổn định phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn trên nền đàn hồi phi tuyến, chịu tải áp lực ngoài và tải nhiệt tăng đều. Lựa chọn dạng nghiệm đa thức và áp dụng phương pháp Ritz để nhận được các biểu thức tải tới hạn và liên hệ tải - độ võng sau mất ổn định cho bài toán chỏm cầu thoải và tấm tròn làm từ vật liệu FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng.

3. Theo tiếp cận hàm ứng suất, dựa trên FSDT, tính phi tuyến hình học của von Kármán, luận án đã thiết lập các phương trình chủ đạo của bài toán ổn định phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn làm từ vật liệu FG-GPLRC rỗng. Kết cấu được xem xét trong tương tác với nền thông qua mô hình nền đàn hồi phi tuyến ba hệ số, đồng thời chịu tác động của tải áp lực ngoài và tải nhiệt tăng đều. Lựa chọn dạng nghiệm đa thức và áp dụng phương pháp Ritz để nhận được các biểu thức tải tới hạn và liên hệ tải - độ võng sau mất ổn định cho bài toán chỏm cầu thoải và tấm tròn làm từ vật liệu FG-GPLRC rỗng.

4. Dựa trên các kết quả lý thuyết, nghiên cứu đã tiến hành phân tích chi tiết ảnh hưởng của các yếu tố khác nhau đến ứng xử ổn định và sau mất ổn định của kết cấu. Về mặt kết cấu, đã xem xét tác động của kích thước hình học kết cấu, nền đàn hồi tuyến tính và phi tuyến, cũng như sự không hoàn hảo về hình dạng ban đầu. Về mặt

vật liệu, nghiên cứu đã phân tích chi tiết ảnh hưởng của các thông số đặc trưng của từng loại vật liệu, bao gồm:

- FG-GPLRC rỗng và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng với các kết cấu: chỏm cầu, chỏm parabol, chỏm sin, chỏm elip và tấm tròn theo FSDT.

- FGM rỗng, sandwich FGM lõi rỗng, FG-GPLRC và sandwich FG-GPLRC lõi rỗng với kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn theo R3SDT.

- FG-GPLRC rỗng với kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn theo FSDT.

Từ các kết quả thu được, những thảo luận và nhận xét quan trọng đã được đưa ra, có tiềm năng ứng dụng trong thực tế thiết kế kỹ thuật công trình. Đồng thời, nghiên cứu cũng đặt nền móng cho việc xây dựng các tiêu chuẩn thiết kế kết cấu dạng tấm tròn và chỏm thoải sử dụng vật liệu FGM và FG-GPLRC trong tương lai.

Nội dung chủ yếu của luận án được công bố trong **08** công trình khoa học, trong đó **06** công trình trên các tạp chí khoa học quốc tế ISI (SCIE), **01** công trình trên tạp chí Cơ học Việt Nam và **01** công trình trên tạp chí JSTT thuộc danh mục Scopus của Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải.

KIẾN NGHỊ VỀ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

1. Nghiên cứu phi tuyến ổn định tĩnh và động cho các kết cấu chỏm thoải có độ cong phức tạp khác sử dụng đa dạng các thiết kế vật liệu FGM và FG-GPLRC khác chịu các tải cơ, nhiệt và cơ - nhiệt kết hợp.

2. Nghiên cứu phi tuyến ổn định và động lực các loại vỏ chỏm thoải có độ cong phức tạp với điều kiện biên khác làm bằng các thiết kế vật liệu FGM và FG-GPLRC.

3. Nghiên cứu phi tuyến ổn định và động lực của các kết cấu chỏm thoải và tấm tròn có độ cong phức tạp làm bằng các thiết kế vật liệu FGM và FG-GPLRC có thêm các biện pháp tăng cứng.

4. Nghiên cứu xây dựng các tiêu chuẩn thiết kế kết cấu dạng tấm tròn và vỏ chỏm thoải có độ cong phức tạp FGM và FG-GPLRC loại đặc, rỗng và sandwich lõi rỗng cho các công trình xây dựng.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

Luận án đã công bố được **08** công trình khoa học. Trong đó có **06** công trình trên các tạp chí khoa học quốc tế ISI (SCIE), **01** công trình trên tạp chí Cơ học Việt Nam và **01** công trình trên tạp chí JSTT thuộc danh mục Scopus của Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải trong thời gian thực hiện luận án như sau:

- Bui Tien Tu, Nguyen Thi Phuong, Le Ngoc Ly, Vu Tho Hung, Vu Hoai Nam, (2024). A New Analytical Approach to the Nonlinear Thermo-Mechanical Buckling Behavior of Three-Dimensional Graphene Foams-Reinforced Complexly Curved Caps and Circular Plates. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2550169. (Tap chí quốc tế SCIE, Q1)
- Vu Hoai Nam, Bui Tien Tu, Vu Tho Hung, Cao Van Doan, Nguyen Thi Phuong, (2024). Nonlinear thermomechanical buckling and postbuckling analysis of sandwich FG-GPLRC complexly curved caps and circular plates with porous core. Acta Mechanica 236, 421–438. (Tap chí quốc tế SCIE, Q1)
- Bui Tien Tu, Le Ngoc Ly, Nguyen Thi Phuong, (2022). A New Analytical Approach of Nonlinear Thermal Buckling of FG-GPLRC Circular Plates and Shallow Spherical Caps Using the FSDT and Galerkin Method. Vietnam Journal of Mechanics 44(4), 418–30. (<u>Tap chí Cơ học Việt Nam</u>)
- 4. Bui Tien Tu, Dang Thuy Dong, Vu Minh Duc, Vu Hoai Nam, (2024). Nonlinear Buckling and Postbuckling Response of Porous FGM Shallow Spherical Caps and Circular Plates with Nonlinear Elastic Foundation Effects Using the Ritz Energy Method. Mechanics of Composite Materials 60(3), 417– 432. (Tap chí quốc tế SCIE, Q2)
- Le Ngoc Ly, Duong Thi Ngoc Thu, Dang Thuy Dong, Vu Minh Duc, Bui Tien Tu, Nguyen Thi Phuong, Vu Hoai Nam, (2023). A Novel Analytical Approach for Nonlinear Thermo-Mechanical Buckling of Higher-Order Shear Deformable Porous Circular Plates and Spherical Caps with FGM Face Sheets. International Journal of Applied Mechanics 15(05), 2350035. (<u>Tap chí quốc tế</u> <u>SCIE, Q2</u>)

- Nguyen Thi Phuong, Dang Thuy Dong, Bui Tien Tu, Vu Minh Duc, Le-Nguyen Khuong, Pham Thanh Hieu, Vu Hoai Nam, (2024). Nonlinear thermomechanical axisymmetric stability of FG-GPLRC spherical shells and circular plates resting on nonlinear elastic medium. Ships and Offshore Structures 19(6), 820–830. (Tap chí quốc tế SCIE, Q2)
- 7. Le Ngoc Ly, Bui Tien Tu, Duong Thi Ngoc Thu, Dang Thuy Dong, Vu Minh Duc, Nguyen Thi Phuong, (2023). Nonlinear thermo-mechanical buckling and postbuckling of sandwich FG-GPLRC spherical caps and circular plates with porous core by using higher-order shear deformation theory. Journal of Thermoplastic Composite Materials 36(10), 4083–4105. (Tap chí quốc tế SCIE, Q1)
- 8. Nguyen Thi Phuong, Vu Hoai Nam, Bui Tien Tu, (2025). An Analytical Approach for Nonlinear Thermo-Mechanical Buckling Behavior of Porous FG-GPLRC Circular Plates and Spherical Caps. Journal of Science and Transport Technology, 40–60. (<u>Tap chí JSTT thuộc danh mục Scopus của Trường Đại học</u> <u>Công nghệ Giao thông vận tải</u>)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu tiếng Việt

- [1] Đào Huy Bích (2000). Lý thuyết đàn hồi. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà
 Nội, Hà Nội.
- [2] Cao Văn Đoàn (2024). Ôn định tĩnh đàn hồi phi tuyến của một số tấm và vỏ composite gia cường graphene chịu tải cơ trong môi trường nhiệt, Luận án tiến sĩ Cơ kỹ thuật. Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- [3] Đặng Thùy Đông (2017). Phân tích ổn định và động lực phi tuyến của vỏ thoải sandwich cơ tính biến thiên chịu tác dụng của tải cơ và nhiệt, Luận án tiến sĩ Cơ học. Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [4] Phạm Thanh Hiếu (2022). Phân tích ổn định tĩnh của vỏ trụ và vỏ trống làm từ FGM và FG-CNTRC có kể đến tính đàn hồi của liên kết biên, Luận án tiến sĩ kỹ thuật. Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- [5] Lê Khả Hòa (2015). Phân tích ổn định phi tuyến tĩnh của vỏ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên, Luận án tiến sĩ Cơ học. Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [6] Vũ Hoài Nam (2015). Phân tích phi tuyến động lực của vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên, Luận án tiến sĩ Cơ học. Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [7] Nguyễn Thị Phương (2014). Nghiên cứu ổn định tĩnh của tấm và vỏ Composite cơ tính biến thiên có gân gia cường lệch tâm, Luận án tiến sĩ kỹ thuật. Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội.
- [8] Lê Thị Như Trang (2021). Ôn định nhiệt đàn hồi của tấm và vỏ thoải composite gia cường carbon nanotube, Luận án tiến sĩ kỹ thuật. Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- [9] Nguyễn Văn Tiến (2024). Ôn định đàn hồi phi tuyến của kết cấu công trình dạng tấm vỏ FG-CNTRC có tính tới các biện pháp tăng cứng. Luận án tiến sĩ kỹ thuật. Đại học Công nghệ Giao thông Vận tải, Hà Nội.

[10] Hoàng Văn Tùng (2011). Ôn định đàn hồi của tấm và vỏ Composite có cơ tính biến đổi, Luận án tiến sĩ cơ học. Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

Tài liệu tiếng nước ngoài

- [11] Akinwande, D., Brennan, C. J., Bunch, J.S., Egberts, P., Felts, J.R., Gao, H., Huang, R., Kim, J.S., Li, T., Li, Y., Liechti, K.M., Lu, N., Park, H.S., Reed, E.J., Wang, P., Yakobson, B.I., Zhang, T., Zhang, Y.W., Zhou, Y., Zhu, Y. (2017). A review on mechanics and mechanical properties of 2D materials—Graphene and beyond. *Extreme Mechanics Letters* 13, 42–77.
- [12] Alibeigloo, A. (2014). Three-dimensional thermo-elasticity solution of sandwich cylindrical panel with functionally graded core. *Composite Structures* 107, 458–468.
- [13] Alibeigloo, A. (2020). Three-dimensional thermoelasticity analysis of graphene platelets reinforced cylindrical panel. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 81, 103941.
- [14] Alibeigloo, A., Liew, K.M. (2014). Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity. *Composite Structures* 113, 23–30.
- [15] Alibeigloo, A., Rajaee Piteh Noee, A. (2017). Static and free vibration analysis of sandwich cylindrical shell based on theory of elasticity and using DQM. *Acta Mechanica* 228(12), 4123–4140.
- [16] Amir, M., Talha, M. (2019). Imperfection sensitivity in the vibration behavior of functionally graded arches by considering microstructural defects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 233(8), 2763–2777.
- [17] Anh, V.T.T., Duc, N.D. (2016). Nonlinear response of a shear deformable S-FGM shallow spherical shell with ceramic-metal-ceramic layers resting on an elastic foundation in a thermal environment. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 23(8), 926–934.
- [18] Anh, V.T.T., Huong, V.T., Nguyen, P.D., Duc, N.D. (2021). Nonlinear Dynamic Analysis of Porous Graphene Platelet-Reinforced Composite

Sandwich Shallow Spherical Shells. *Mechanics of Composite Materials* 57(5), 609–622.

- [19] Ansari, R., Hassani, R., Gholami, R., Rouhi, H. (2021). Buckling and Postbuckling of Plates Made of FG-GPL-Reinforced Porous Nanocomposite with Various Shapes and Boundary Conditions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 21(05), 2150063.
- [20] Atmane, H.A, Tounsi, A., Bernard, F. (2017). Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *International Journal of Mechanics and Materials in Design* 13(1), 71–84.
- [21] Barati, M.R., Zenkour, A.M. (2018). Electro-thermoelastic vibration of plates made of porous functionally graded piezoelectric materials under various boundary conditions. *Journal of Vibration and Control* 24(10), 1910–1926.
- [22] Benatta, M.A., Kaci, A., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bakhti, K., Bedia, E.A.A. (2014). Nonlinear bending analysis of functionally graded plates under pressure loads using a four variable refined plate theory. *International Journal* of Computational Methods 11(04), 1350062.
- [23] Bensaid, I., Saimi, A., Houalef, I.E. (2022). On dynamic analysis of multilayer functionally graded graphene platelet-reinforced composite beams subjected to thermal loads (No. 1) 4(1), Article 1.
- [24] Bich, D.H., Dung, D.V., Hoa, L.K. (2012). Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects. *Composite Structures* 94(9), 2952–2960.
- [25] Bich, D.H., Dung, D.V., Nam, V.H. (2013). Nonlinear axisymmetric dynamic buckling and vibration of functionally graded shallow spherical shells under external pressure including temperature effects resting on elastic foundation. *Thành phố Hồ Chí Minh 2013*, 101–110.
- [26] Bich, D.H., Hoa, L.K. (2010). Non-linear vibration of functionally graded shallow spherical shells. *Vietnam Journal of Mechanics* 32(4), Article 4.

- [27] Bich, D.H., Nguyen, N.X. (2012). Nonlinear vibration of functionally graded circular cylindrical shells based on improved Donnell equations. *Journal of Sound and Vibration* 331(25), 5488–5501.
- [28] Bich, D.H., Tung, H.V. (2011). Non-linear axisymmetric response of functionally graded shallow spherical shells under uniform external pressure including temperature effects. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46(9), 1195–1204.
- [29] Blooriyan, S., Ansari, R., Darvizeh, A., Gholami, R., Rouhi, H. (2019). Postbuckling analysis of functionally graded graphene platelet-reinforced polymer composite cylindrical shells using an analytical solution approach. *Applied Mathematics and Mechanics* 40(7), 1001–1016.
- [30] Boroujerdy, M.S., Eslami, M.R. (2013). Nonlinear axisymmetric thermomechanical response of piezo-FGM shallow spherical shells. *Archive* of Applied Mechanics 83(12), 1681–1693.
- [31] Boroujerdy, M.S., Eslami, M.R. (2014). Axisymmetric snap-through behavior of Piezo-FGM shallow clamped spherical shells under thermo-electromechanical loading. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 120–121, 19–26.
- [32] Boroujerdy, M.S., Eslami, M.R. (2015). Unsymmetrical Buckling of Piezo-FGM Shallow Clamped Spherical Shells under Thermal Loading. *Journal of Thermal Stresses* 38(11), 1290–1307.
- [33] Cataldi, P., Athanassiou, A., Bayer, I.S. (2018). Graphene Nanoplatelets-Based Advanced Materials and Recent Progress in Sustainable Applications. *Applied Sciences* 8(9), Article 9.
- [34] Chen, X., Wu, J., Wang, Y. (2024). Nonlinear Thermo-Mechanical Responses of Graphene Platelet-Reinforced Composite Lattice Sandwich Plates with Attached NES Under Explosive Loads. *Journal of Vibration Engineering Technologies* 12(1), 633–646.
- [35] Doan, C.V., Nam, V.H. (2022). Large Deflection Bending Analysis of FG-GPLRC Doubly Curved Thin Shallow Shells Stiffened by Oblique Stiffeners.
 In C. Ha-Minh, A. M. Tang, T. Q. Bui, X. H. Vu, D. V. K. Huynh (Eds.),

CIGOS 2021, Emerging Technologies and Applications for Green Infrastructure (pp. 351–360). Springer Nature.

- [36] Duc, N.D., Tung, H.V. (2010). Nonlinear response of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels with temperature effects. *Composite Structures* 92(7), 1664–1672.
- [37] Duc, N.D., Anh, V.T.T., Cong, P.H. (2014). Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shells on elastic foundations under uniform external pressure and temperature. *European Journal of Mechanics A/Solids* 45, 80–89.
- [38] Duc, N.D., Thang, P.T., Dao, N.T., Tac, H.V. (2015). Nonlinear buckling of higher deformable S-FGM thick circular cylindrical shells with metal– ceramic–metal layers surrounded on elastic foundations in thermal environment. *Composite Structures* 121, 134–141.
- [39] Dung, D.V., Hoa, L.K. (2012). Nonlinear analysis of buckling and postbuckling for axially compressed functionally graded cylindrical panels with the Poisson's ratio varying smoothly along the thickness. *Vietnam Journal of Mechanics* 34(1), Article 1.
- [40] Dybowska-Sarapuk, L., Kielbasinski, K., Arazna, A., Futera, K., Skalski, A., Janczak, D., Sloma, M., Jakubowska, M. (2018). Efficient Inkjet Printing of Graphene-Based Elements: Influence of Dispersing Agent on Ink Viscosity. *Nanomaterials* 8(8), Article 8.
- [41] Eftekhari, A., Jafarkhani, P. (2013). Curly Graphene with Specious Interlayers Displaying Superior Capacity for Hydrogen Storage. *The Journal of Physical Chemistry C* 117(48), 25845–25851.
- [42] Eshraghi, I., Dag, S. (2020). Forced vibrations of functionally graded annular and circular plates by domain-boundary element method. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik 100(8), e201900048.
- [43] Esmaeili, H., Kiani, Y., Tadi Beni, Y. (2022). Vibration characteristics of composite doubly curved shells reinforced with graphene platelets with arbitrary edge supports. *Acta Mechanica* 233, 1–19.

- [44] Esmaeili, H.R., Kiani, Y. (2024). Vibrations of graphene platelet reinforced composite doubly curved shells subjected to thermal shock. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 52(2), 650–679.
- [45] Fang, H., Bai, Y., Liu, W., Qi, Y., Wang, J. (2019). Connections and structural applications of fibre reinforced polymer composites for civil infrastructure in aggressive environments. *Composites Part B: Engineering* 164, 129–143.
- [46] Farhatnia, F., Ghanbari-Mobarakeh, M., Rasouli, S., Oveissi, S. (2017). Thermal buckling analysis of functionally graded circular plate resting on the pasternak elastic foundation via the differential transform method. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering* 15.
- [47] Geim, A.K. (2009). Graphene: Status and Prospects. Science 324(5934), 1530–1534.
- [48] Genoese, A., Genoese, A., Rizzi, N.L., Salerno, G. (2017). On the derivation of the elastic properties of lattice nanostructures: The case of graphene sheets. *Composites Part B: Engineering* 115, 316–329.
- [49] Ghomshei, M.M. (2020). A numerical study on the thermal buckling of variable thickness Mindlin circular FGM plate on a two-parameter foundation. *Mechanics Research Communications* 108, 103577.
- [50] Gupta, A., Talha, M. (2018). Influence of Porosity on the Flexural and Free Vibration Responses of Functionally Graded Plates in Thermal Environment. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 18(01), 1850013.
- [51] Heydarpour, Y., Malekzadeh, P., Gholipour, F. (2019). Thermoelastic analysis of FG-GPLRC spherical shells under thermo-mechanical loadings based on Lord-Shulman theory. *Composites Part B: Engineering* 164, 400–424.
- [52] Heydarpour, Y., Malekzadeh, P., Zhu, H. (2022). Three-Dimensional Response of Multilayer FG-GPLRC Spherical Panels Under Blast Loading. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 22(11), 2250111.
- [53] Heydarpour, Y., Mohammadzaheri, M., Ghodsi, M., Soltani, P., AlJahwari, F., Bahadur, I., Al-Amri, B. (2020). Application of the hybrid DQ- Heaviside-NURBS method for dynamic analysis of FG-GPLRC cylindrical shells subjected to impulse load. *Thin-Walled Structures* 155, 106914.

- [54] Huang, H., Han, Q. (2008). Buckling of imperfect functionally graded cylindrical shells under axial compression. *European Journal of Mechanics -A/Solids* 27(6), 1026–1036.
- [55] Huang, H., Han, Q. (2009a). Nonlinear buckling and postbuckling of heated functionally graded cylindrical shells under combined axial compression and radial pressure. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 44(2), 209– 218.
- [56] Huang, H., Han, Q. (2009b). Nonlinear elastic buckling and postbuckling of axially compressed functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences* 51(7), 500–507.
- [57] Huang, H., Han, Q. (2010a). Nonlinear dynamic buckling of functionally graded cylindrical shells subjected to time-dependent axial load. *Composite Structures* 92(2), 593–598.
- [58] Huang, H., Han, Q. (2010b). Research on nonlinear postbuckling of functionally graded cylindrical shells under radial loads. *Composite Structures* 92(6), 1352–1357.
- [59] Huang, H., Han, Q., Wei, D. (2011). Buckling of FGM cylindrical shells subjected to pure bending load. *Composite Structures* 93(11), 2945–2952.
- [60] Huang, X., Yang, J., Yang, Z. (2021). Thermo-elastic analysis of functionally graded graphene nanoplatelets (GPLs) reinforced closed cylindrical shells. *Applied Mathematical Modelling* 97, 754–770.
- [61] Huo, J., Zhang, G., Ghabussi, A., Habibi, M. (2021). Bending analysis of FG-GPLRC axisymmetric circular/annular sector plates by considering elastic foundation and horizontal friction force using 3D-poroelasticity theory. *Composite Structures* 276, 114438.
- [62] Jabbari, M., Shahryari, E., Haghighat, H., Eslami, M.R. (2014). An analytical solution for steady state three dimensional thermoelasticity of functionally graded circular plates due to axisymmetric loads. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 47, 124–142.
- [63] Jam, J.E., Maleki, S., Andakhshideh, A. (2012). Non-Linear Bending Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Plates Using Generalized

Differential Quadrature Method. *International Journal of Aerospace Sciences* 1(3), 49–56.

- [64] Javaheri, R., Eslami, M.R. (2002). Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Based on Higher Order Theory. *Journal of Thermal Stresses* 25(7), 603–625.
- [65] Javani, M., Kiani, Y., Eslami, M.R. (2020). Thermal buckling of FG graphene platelet reinforced composite annular sector plates. *Thin-Walled Structures* 148, 106589.
- [66] Javani, M., Kiani, Y., Eslami, M.R. (2021). Geometrically nonlinear free vibration of FG-GPLRC circular plate on the nonlinear elastic foundation. *Composite Structures* 261, 113515.
- [67] Jiao, Z., Heblekar, T., Wang, G., Xu, R., Reddy, J.N. (2024). Static, free vibration, and buckling analysis of functionally graded plates using the dual mesh control domain method. *Computers Structures* 305, 107575.
- [68] Karimiasl, M., Alibeigloo, A. (2022). Nonlinear free and forced vibration analysis of sandwich cylindrical panel with auxetic core and GPLRC facing sheets in hygrothermal environment. *Thin-Walled Structures* 175, 109164.
- [69] Kesong, H., Kulkarni, D.D., Choi, I., Tsukruk, V.V. (2014). Graphenepolymer nanocomposites for structural and functional applications. *Progress in Polymer Science* 39(11), 1934–1972.
- [70] Kiani, Y. (2017). Axisymmetric static and dynamics snap-through phenomena in a thermally postbuckled temperature-dependent FGM circular plate. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 89, 1–13.
- [71] Kiani, Y., Akbarzadeh, A.H., Chen, Z.T., Eslami, M.R. (2012). Static and dynamic analysis of an FGM doubly curved panel resting on the Pasternaktype elastic foundation. *Composite Structures* 94(8), 2474–2484.
- [72] Kim, Y.J. (2019). State of the practice of FRP composites in highway bridges. *Engineering Structures* 179, 1–8.
- [73] Koizumi, M. (1993). The Concept of Fgm. Ceramic Transactions /Ceramic Transactions 34, 3–10.

- [74] Kossakowski, P.G., Wciślik, W. (2022). Fiber-Reinforced Polymer Composites in the Construction of Bridges: Opportunities, Problems and Challenges. *Fibers* 10(4), Article 4.
- [75] Liang, Q., Yao, X., Wang, W., Liu, Y., Wong, C. P. (2011). A Three-Dimensional Vertically Aligned Functionalized Multilayer Graphene Architecture: An Approach for Graphene-Based Thermal Interfacial Materials. ACS Nano 5(3), 2392–2401.
- [76] Liu, D., Zhou, Y., Zhu, J. (2021). On the free vibration and bending analysis of functionally graded nanocomposite spherical shells reinforced with graphene nanoplatelets: Three-dimensional elasticity solutions. *Engineering Structures* 226, 111376.
- [77] Loc, T.V., Chien, T.H., Hung, N.X. (2013). An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design* 73, 65–76.
- [78] Madan, R., Bhowmick, S. (2021). Limit Elastic Analysis of Functionally Graded Rotating Disks Under Thermo-Mechanical Loading. *International Journal of Applied Mechanics* 13(03), 2150033.
- [79] Minh, T.Q., Dong, D.T., Duc, V.M., Tien, N.V., Phuong, N.T., Nam, V.H. (2022). Nonlinear Axisymmetric Vibration of Sandwich FGM Shallow Spherical Caps with Lightweight Porous Core. In CIGOS 2021, Emerging Technologies and Applications for Green Infrastructure (pp. 381–389). Springer, Singapore.
- [80] Mirzaei, M., Jafari, M. (2023). On the response of graphene platelet reinforced composite conical panels subjected to mechanical shock. *Materials Today Communications* 34, 105374.
- [81] Moosaie, A., Panahi-Kalus, H. (2017). Thermal stresses in an incompressible FGM spherical shell with temperature-dependent material properties. *Thin-Walled Structures* 120, 215–224.
- [82] Najafizadeh, M.M., Hedayati, B. (2004). Refined Theory for Thermoelastic Stability of Functionally Graded Circular Plates. *Journal of Thermal Stresses* 27(9), 857–880.

- [83] Nam, V.H., Phuong, N.T., Dong, D.T., Trung, N.T., Tue, N.V. (2019). Nonlinear thermo-mechanical buckling of higher-order shear deformable porous functionally graded material plates reinforced by orthogonal and/or oblique stiffeners. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 233(17), 6177–6196.
- [84] Nam, V.H., Trung, N.T., Hoa, L.K. (2019). Buckling and postbuckling of porous cylindrical shells with functionally graded composite coating under torsion in thermal environment. *Thin-Walled Structures* 144, 106253.
- [85] Nam, V.H., Tu, B.T., Hung, V.T., Doan, C.V., Phuong, N.T. (2025). Nonlinear thermomechanical buckling and postbuckling analysis of sandwich FG-GPLRC complexly curved caps and circular plates with porous core. Acta Mechanica 236(1), 421–438.
- [86] Ng, T.Y., Lam, K.Y., Liew, K.M., Reddy, J.N. (2001). Dynamic stability analysis of functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading. *International Journal of Solids and Structures* 38(8), 1295–1309.
- [87] Nieto, A., Boesl, B., Agarwal, A. (2015). Multi-scale intrinsic deformation mechanisms of 3D graphene foam. *Carbon* 85, 299–308.
- [88] Novoselov, K.S., Geim, A.K., Morozov, S.V., Jiang, D., Katsnelson, M.I., Grigorieva, I.V., Dubonos, S.V., Firsov, A.A. (2005). Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. *Nature* 438(7065), 197–200.
- [89] Novoselov, K.S., Geim, A.K., Morozov, S.V., Jiang, D., Zhang, Y., Dubonos, S.V., Grigorieva, I.V., Firsov, A.A. (2004). Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. *Science* 306(5696), 666–669.
- [90] Pendhari, S.S., Kant, T., Desai, Y.M. (2008). Application of polymer composites in civil construction: A general review. *Composite Structures* 84(2), 114–124.
- [91] Phuong, N.T., Nam, V.H., Dong, D.T. (2020). Nonlinear vibration of functionally graded sandwich shallow spherical caps resting on elastic foundations by using first-order shear deformation theory in thermal environment. *Journal of Sandwich Structures Materials* 22(4), 1157–1183.
- [92] Pop, E., Varshney, V., Roy, A.K. (2012). Thermal properties of graphene: Fundamentals and applications. *MRS Bulletin* 37(12), 1273–1281.
- [93] Potts, J.R., Dreyer, D.R., Bielawski, C.W., Ruoff, R.S. (2011). Graphenebased polymer nanocomposites. *Polymer* 52(1), 5–25.
- [94] Prakash, T., Singha, M.K., Ganapathi, M. (2007). Nonlinear Dynamic Thermal Buckling of Functionally Graded Spherical Caps. *Aiaa Journal -AIAA J* 45, 505–508.
- [95] Qin, Z., Jung, G.S., Kang, M.J., Buehler, M.J. (2017). The mechanics and design of a lightweight three-dimensional graphene assembly. *Science Advances* 3(1), e1601536.
- [96] Quoc, T.H., Huan, D.T., Tu, T.M. (2018). Free vibration analysis of functionally graded doubly curved shell panels resting on elastic foundation in thermal environment. *International Journal of Advanced Structural Engineering* 10(3), 275–283.
- [97] Rafiee, M. A., Rafiee, J., Wang, Z., Song, H., Yu, Z.Z., Koratkar, N. (2009). Enhanced Mechanical Properties of Nanocomposites at Low Graphene Content. ACS Nano 3(12), 3884–3890.
- [98] Reddy, J.N. (2006). *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells* (2nd ed.). CRC Press.
- [99] Reddy, J.N., Ruocco, E., Loya, J. A., Neves, A. M. A. (2021). Theories and analyses of functionally graded circular plates. *Composites Part C: Open Access* 5, 100166.
- [100] Roun, S., Nguyen, V.L., Rungamornrat, J. (2024). Free Vibration and Buckling Analyses of Functionally Graded Plates With Graphene Platelets Reinforcement. *Journal of Computing and Information Science in Engineering* 25, 011002.
- [101] Safarpour, M., Ghabussi, A., Ebrahimi, F., Habibi, M., Safarpour, H. (2020). Frequency characteristics of FG-GPLRC viscoelastic thick annular plate with the aid of GDQM. *Thin-Walled Structures* 150, 106683.

- [102] Saini, R., Saini, S., Lal, R., Singh, I.V. (2019). Buckling and vibrations of FGM circular plates in thermal environment. *Procedia Structural Integrity* 14, 362–374.
- [103] Shahsiah, R., Eslami, M.R., Naj, R. (2006). Thermal Instability of Functionally Graded Shallow Spherical Shell. *Journal of Thermal Stresses*.
- [104] Shen, H.S. (2002). Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Composites Science and Technology* 62(7), 977–987.
- [105] Shen, H.S. (2003). Postbuckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Engineering Structures* 25(4), 487–497.
- [106] Shen, H.S. (2004). Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties. *International Journal of Solids and Structures* 41(7), 1961–1974.
- [107] Shen, H.S. (2007). Thermal Postbuckling of Shear Deformable FGM Cylindrical Shells with Temperature-Dependent Properties. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 14(6), 439–452.
- [108] Shen, H.S. (2009a). Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells. CRC Press.
- [109] Shen, H.S. (2009b). Postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. *International Journal of Mechanical Sciences* 51(5), 372–383.
- [110] Shen, H.S. (2014a). Nonlinear thermal bending of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations under heat conduction. *Composite Structures* 113, 216–224.
- [111] Shen, H.S. (2014b). Postbuckling of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations subjected to lateral pressure under heat conduction. *International Journal of Mechanical Sciences* 89, 453–461.
- [112] Shen, H.S., Noda, N. (2005). Postbuckling of FGM cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environments. *International Journal of Solids and Structures* 42(16), 4641–4662.

- [113] Shen, H.S., Wang, H. (2014a). Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments. *Composites Part B: Engineering* 60, 167–177.
- [114] Shen, H.S., Wang, H. (2014b). Thermal postbuckling of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations. *Aerospace Science and Technology* 38, 9–19.
- [115] Sobhy, M. (2021). Piezoelectric bending of GPL-reinforced annular and circular sandwich nanoplates with FG porous core integrated with sensor and actuator using DQM. *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 21(2), 78.
- [116] Sofiyev, A.H. (2014). The vibration and buckling of sandwich cylindrical shells covered by different coatings subjected to the hydrostatic pressure. *Composite Structures* 117, 124–134.
- [117] Sofiyev, A.H., Kuruoglu, N. (2015a). Dynamic instability of three-layered cylindrical shells containing an FGM interlayer. *Thin-Walled Structures* 93, 10–21.
- [118] Sofiyev, A.H., Kuruoglu, N. (2015b). Parametric instability of shear deformable sandwich cylindrical shells containing an FGM core under static and time dependent periodic axial loads. *International Journal of Mechanical Sciences* 101–102, 114–123.
- [119] Sofiyev, A.H., Hui, D., Huseynov, S., Salamci, M., Yuan, G. (2016). Stability and vibration of sandwich cylindrical shells containing a functionally graded material core with transverse shear stresses and rotary inertia effects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 230(14), 2376–2389.
- [120] Sofiyev, A.H., Hui, D., Najafov, A., Turkaslan, S., Dorofeyskaya, N., Yuan, G. (2015). Influences of shear stresses and rotary inertia on the vibration of functionally graded coated sandwich cylindrical shells resting on the Pasternak elastic foundation. *Journal of Sandwich Structures Materials* 17(6), 691–720.
- [121] Song, M., Yang, J., Kitipornchai, S., Zhu, W. (2017). Buckling and postbuckling of biaxially compressed functionally graded multilayer graphene

nanoplatelet-reinforced polymer composite plates. *International Journal of Mechanical Sciences* 131–132, 345–355.

- [122] Stankovich, S., Dikin, D.A., Dommett, G.H.B., Kohlhaas, K.M., Zimney, E.J., Stach, E.A., Piner, R.D., Nguyen, S.T., Ruoff, R.S. (2006). Graphene-based composite materials. *Nature* 442(7100), 282–286.
- [123] Teng, Z., Wang, W., Gu, C. (2022). Free vibration and buckling characteristics of porous functionally graded materials (FGMs) micro-beams based on the modified couple stress theory. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik 102(4), e202100219.
- [124] Tsoukleri, G., Parthenios, J., Papagelis, K., Jalil, R., Ferrari, A.C., Geim, A.K., Novoselov, K.S., Galiotis, C. (2009). Subjecting a Graphene Monolayer to Tension and Compression. *Small* 5(21), 2397–2402.
- [125] Tung, H.V. (2014). Nonlinear thermomechanical stability of shear deformable FGM shallow spherical shells resting on elastic foundations with temperature dependent properties. *Composite Structures* 114, 107–116.
- [126] Tung, H.V. (2016). Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shells with tangential edge constraints and resting on elastic foundations. *Composite Structures* 149, 231–238.
- [127] Tung, H.V., Duc, N.D. (2010). Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Composite Structures* 92(5), 1184–1191.
- [128] Udupa, G., Rao, S.S., Gangadharan, K.V. (2014). Functionally Graded Composite Materials: An Overview. *Procedia Materials Science* 5, 1291– 1299.
- [129] Wang, A., Chen, H., Hao, Y., Zhang, W. (2018). Vibration and bending behavior of functionally graded nanocomposite doubly-curved shallow shells reinforced by graphene nanoplatelets. *Results in Physics* 9, 550–559.
- [130] Wang, C., Zhang, C., Chen, S. (2016). The microscopic deformation mechanism of 3D graphene foam materials under uniaxial compression. *Carbon* 109, 666–672.

- [131] Wang, Y., Feng, C., Zhao, Z., Yang, J. (2018). Buckling of Graphene Platelet Reinforced Composite Cylindrical Shell with Cutout. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 18(03), 1850040.
- [132] Wang, Y., Zeng, R., Safarpour, M. (2022). Vibration analysis of FG-GPLRC annular plate in a thermal environment. *Mechanics Based Design of Structures* and Machines 50(1), 352–370.
- [133] Wattanasakulpong, N., Chaikittiratana, A., Pornpeerakeat, S. (2018). Chebyshev collocation approach for vibration analysis of functionally graded porous beams based on third-order shear deformation theory. *Acta Mechanica Sinica* 34(6), 1124–1135.
- [134] Yang, J., Chen, Y. (2008). Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks. *Composite Structures* 83(1), 48–60.
- [135] Yang, J., Wu, H., Kitipornchai, S. (2017). Buckling and postbuckling of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced composite beams. *Composite Structures* 161, 111–118.
- [136] Yang, S.W, Hao, Y.X, Zhang, W., Yang, L., Liu, L.T. (2021). Nonlinear vibration of functionally graded graphene platelet-reinforced composite truncated conical shell using first-order shear deformation theory. *Applied Mathematics and Mechanics* 42(7), 981–998.
- [137] Yang, S. W., Hao, Y.X., Zhang, W., Yang, L., Liu, L.T. (2021). Free vibration and buckling of eccentric rotating FG-GPLRC cylindrical shell using firstorder shear deformation theory. *Composite Structures* 263, 113728.
- [138] Zhang, L., Chen, Z., Habibi, M., Ghabussi, A., Alyousef, R. (2021). Lowvelocity impact, resonance, and frequency responses of FG-GPLRC viscoelastic doubly curved panel. *Composite Structures* 269, 114000.
- [139] Zhang, Y.Y., Wang, C.M., Cheng, Y., Xiang, Y. (2011). Mechanical properties of bilayer graphene sheets coupled by *sp3* bonding. *Carbon* 49(13), 4511–4517.
- [140] Zhao, X., Zhang, Q., Hao, Y., Li, Y., Fang, Y., Chen, D. (2010). Alternate Multilayer Films of Poly(vinyl alcohol) and Exfoliated Graphene Oxide

Fabricated via a Facial Layer-by-Layer Assembly. *Macromolecules* 43(22), 9411–9416.

- [141] Zhao, Z., Feng, C., Wang, Y., Yang, J. (2017). Bending and vibration analysis of functionally graded trapezoidal nanocomposite plates reinforced with graphene nanoplatelets (GPLs). *Composite Structures* 180, 799–808.
- [142] Zohra, Z., Lemya, H., Abderahman, Y., Mustapha, M., Abdelouahed, T., Djamel, O. (2017). Free vibration analysis of functionally graded beams using a higher-order shear deformation theory. *Mathematical Modelling of Engineering Problems* 4(1), 7–12.

PHŲ LŲC

$$\begin{split} & \text{Phy lyc A1} \\ & \text{G}_{111} = Y_{11}^2 \left(A_{11}^* + 7A_{12}^* + 7A_{21}^* + 49A_{22}^* \right), \text{G}_{112} = 2Y_{11}Y_{12} \left(A_{11}^* + 7A_{12}^* + 7A_{21}^* + 49A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{113} = Y_{12}^2 \left(A_{11}^* + 7A_{12}^* + 7A_{21}^* + 49A_{22}^* \right), \text{G}_{121} = 2Y_{11}Y_{21} \left(A_{11}^* + 6A_{12}^* + 6A_{21}^* + 35A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{122} = 2 \left(Y_{11}Y_{22} + Y_{12}Y_{21} \right) \left(A_{11}^* + 6A_{12}^* + 6A_{21}^* + 35A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{123} = 2Y_{11}Y_{23} \left(A_{11}^* + 6A_{12}^* + 6A_{21}^* + 35A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{124} = 2Y_{12}Y_{22} \left(A_{11}^* + 6A_{12}^* + 6A_{21}^* + 35A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{125} = 2Y_{12}Y_{23} \left(A_{11}^* + 6A_{12}^* + 6A_{21}^* + 35A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{124} = 2Y_{12}Y_{23} \left(A_{11}^* + 6A_{12}^* + 6A_{21}^* + 35A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{131} = 2Y_{31}Y_{11} \left(A_{11}^* + 5A_{12}^* + 5A_{21}^* + 21A_{22}^* \right) + Y_{21}^2 \left(A_{11}^* + 5A_{12}^* + 5A_{21}^* + 25A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{132} = \left(42Y_{32}Y_{11} + 42Y_{31}Y_{12} \right) \left(\frac{5A_{21}^* + 5A_{12}^* + 5A_{11}^*} + 4A_{22}^* \right) \\ & \quad + 50Y_{21}Y_{22} \left(A_{22}^* + \frac{A_{11}^* + 5A_{12}^* + 5A_{21}^* + 21A_{22}^* \right) + 2Y_{21}Y_{23} \left(A_{11}^* + 5A_{12}^* + 5A_{21}^* + 25A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{134} = 2Y_{32}Y_{12} \left(A_{11}^* + 5A_{12}^* + 5A_{21}^* + 21A_{22}^* \right) + Y_{22}^2 \left(A_{11}^* + 5A_{12}^* + 5A_{21}^* + 25A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{135} = 2Y_{33}Y_{12} \left(A_{11}^* + 5A_{12}^* + 5A_{21}^* + 21A_{22}^* \right) + 2Y_{22}Y_{23} \left(A_{11}^* + 5A_{12}^* + 5A_{21}^* + 25A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{136} = -\frac{Y_{11}}{a^3} \left(3B_{11}^* + B_{12}^* + 3C_{11}^* + 21C_{12}^* + 21B_{21}^* + 7B_{22}^* + C_{21}^* + 7C_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{136} = -\frac{Y_{12}}{a^3} \left(3B_{11}^* + B_{12}^* + 3C_{11}^* + 21C_{12}^* + 21B_{21}^* + 7B_{22}^* + C_{21}^* + 7C_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{137} = Y_{23}^2 \left(A_{11}^* + 5A_{12}^* + 5A_{21}^* + 25A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{141} = 2Y_{51}Y_{11} \left(A_{11}^* + 4A_{12}^* + 4A_{21}^* + 7A_{22}^* \right) + 2Y_{21}Y_{31} \left(A_{11}^* + 4A_{12}^* + 4A_{21}^* + 15A_{22}^* \right), \\ & \text{G}_{143} = -\frac{Y_{12}}{a^3} \left(3B_{11}^* + B_{12}^$$

$$\begin{split} & G_{144} = 2Y_{53}Y_{12} \left(A_{11}^{*} + 4A_{12}^{*} + 4A_{21}^{*} + 7A_{22}^{*}\right) + 2Y_{22}Y_{32} \left(A_{11}^{*} + 4A_{12}^{*} + 4A_{21}^{*} + 15A_{22}^{*}\right), \\ & G_{145} = 14Y_{52}Y_{12} \left(A_{22}^{*} + \frac{A_{11}^{*} + 4A_{12}^{*} + 4A_{21}^{*}}{7}\right) \\ & + 30 \left(Y_{22}Y_{33} + Y_{23}Y_{32}\right) \left(A_{22}^{*} + \frac{A_{11}^{*} + 4A_{12}^{*} + 4A_{21}^{*}}{15}\right), \\ & G_{146} = \frac{1}{a^{3}} \left[Y_{11} \left(C_{21}^{*} + 7C_{22}^{*} + B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 7B_{21}^{*} + 7B_{22}^{*} + C_{11}^{*} + 7C_{12}^{*}\right)a^{2} \\ & -Y_{21} \left(C_{21}^{*} + 5C_{22}^{*} + 3B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 15B_{21}^{*} + 5B_{22}^{*} + 3C_{11}^{*} + 15C_{12}^{*}\right)\right], \\ & G_{147} = -Y_{11} \left(\Phi_{1r}^{*} + 7\Phi_{10}^{*}\right), \quad G_{148} = 2Y_{11} \left(A_{11}^{*} + 4A_{12}^{*} + 4A_{21}^{*} + 7A_{22}^{*}\right), \\ & G_{149} = 2Y_{23}Y_{33} \left(A_{11}^{*} + 4A_{12}^{*} + 4A_{21}^{*} + 15A_{22}^{*}\right) + \frac{16K_8H_{44}}{a^8}, \\ & G_{1410} = \frac{Y_{12}}{a} \left(C_{21}^{*} + 7C_{22}^{*} + B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 7B_{21}^{*} + 7B_{22}^{*} + C_{11}^{*} + 7C_{12}^{*}\right) \\ & - \frac{Y_{12}Y_{22}}{a^{3}} \left(C_{21}^{*} + 5C_{22}^{*} + 3B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 15B_{21}^{*} + 5B_{22}^{*} + 3C_{11}^{*} + 15C_{12}^{*}\right), \\ & G_{1411} = -Y_{12} \left(\Phi_{1r}^{*} + 7\Phi_{10}^{*}\right), \quad G_{1412} = 2Y_{12} \left(A_{11}^{*} + 4A_{12}^{*} + 4A_{21}^{*} + 7A_{22}^{*}\right), \\ & G_{1411} = -Y_{12} \left(\Phi_{1r}^{*} + 7\Phi_{10}^{*}\right), \quad G_{1412} = 2Y_{12} \left(A_{11}^{*} + 4A_{12}^{*} + 4A_{21}^{*} + 7A_{22}^{*}\right), \\ & G_{1413} = \frac{-15Y_{23}}{a^{3}} \left(C_{12}^{*} + \frac{C_{21}^{*}}{15} + \frac{C_{22}^{*}}{3} + \frac{B_{11}^{*}}{15} + B_{21}^{*} + \frac{B_{22}^{*}}{3} + \frac{B_{11}^{*}}{5}\right) - \frac{8K_8H_{44}}{a^7}, \\ & G_{151} = 2Y_{51}Y_{21} \left(A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*} + 5A_{22}^{*}\right) + Y_{31}^{2} \left(A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*} + 9A_{22}^{*}\right), \\ & G_{152} = \left(10Y_{53}Y_{21} + 10Y_{51}Y_{22}\right) \left(A_{22}^{*} + \frac{A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*}} + 3A_{21}^{*}\right) \\ & + 18Y_{33}Y_{31} \left(A_{22}^{*} + \frac{A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*}\right) \\ & + 18Y_{33}Y_{31} \left(A_{22}^{*} + \frac{A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*}\right) \\ & +$$

$$\begin{split} G_{155} &= \left(10Y_{52}Y_{22} + 10Y_{53}Y_{23}\right) \left(A_{22}^{*} + \frac{A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*}}{5}\right) \\ &+ 18Y_{32}Y_{33} \left(A_{22}^{*} + \frac{A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*}}{9}\right), \\ G_{156} &= \frac{Y_{21}}{a} \left(C_{21}^{*} + 5C_{22}^{*} + B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 5B_{21}^{*} + 5B_{22}^{*} + C_{11}^{*} + 5C_{12}^{*}\right) \\ &- \frac{Y_{31}}{a^{2}} \left(C_{21}^{*} + 3C_{22}^{*} + 3B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 9B_{21}^{*} + 3B_{22}^{*} + 3C_{11}^{*} + 9C_{12}^{*}\right), \\ G_{157} &= -Y_{21} \left(\Phi_{1r}^{*} + 5\Phi_{16}^{*}\right), \quad G_{158} = 2Y_{21} \left(A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*} + 5A_{22}^{*}\right), \\ G_{159} &= \frac{10Y_{52}Y_{23} \left(5A_{22}^{*} + A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*}\right) \\ &+ 9Y_{33}^{2} \left(A_{22}^{*} + A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*}\right) \\ &- \frac{Y_{32}}{a^{3}} \left(C_{21}^{*} + 5C_{22}^{*} + B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 9B_{21}^{*} + 3B_{22}^{*} + 3C_{11}^{*} + 9C_{12}^{*}\right), \\ G_{1510} &= \frac{Y_{22}}{a} \left(C_{21}^{*} + 5C_{22}^{*} + B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 9B_{21}^{*} + 3B_{22}^{*} + 3C_{11}^{*} + 9C_{12}^{*}\right), \\ G_{1511} &= -Y_{22} \left(\Phi_{1r}^{*} + 5\Phi_{10}^{*}\right), \quad G_{1512} = 2Y_{22} \left(A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*} + 5A_{22}^{*}\right), \\ G_{1513} &= 2Y_{23} \left(A_{11}^{*} + 3A_{12}^{*} + 3A_{21}^{*} + 5A_{22}^{*}\right), \quad G_{1514} = -Y_{23} \left(\Phi_{1r}^{*} + 5\Phi_{10}^{*}\right), \\ G_{1513} &= \frac{2Y_{23}}{a} \left(C_{11}^{*} + 5C_{12}^{*} + C_{21}^{*} + 5C_{22}^{*} + B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 5B_{21}^{*} + 5B_{22}^{*}\right) \\ &- \frac{3Y_{33}}{a^{3}} \left(C_{11}^{*} + 3C_{12}^{*} + \frac{C_{21}^{*}}{3} + C_{22}^{*} + B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 3B_{21}^{*} + B_{22}^{*}\right) + \frac{16K_{5}H_{44}}{a^{5}}, \\ G_{1516} &= \frac{9D_{11}^{*} + 3D_{12}^{*} + 3D_{21}^{*} + D_{22}^{*}}{a^{6}} - \frac{2K_{5}H_{44}}{a^{6}}, \\ G_{161} &= 2Y_{31}Y_{51} \left(A_{11}^{*} + 2A_{12}^{*} + 2A_{21}^{*} + 3A_{22}^{*}\right), \\ G_{162} &= 2\left(Y_{31}Y_{52} + Y_{33}Y_{51}\right) \left(A_{11}^{*} + 2A_{12}^{*} + 2A_{21}^{*} + 3A_{22}^{*}\right), \\ G_{163} &= 2\left(Y_{31}Y_{52} + Y_{33}Y_{53}\right) \left(A_{11}^{*} + 2A_{12}^{*} + 2A_{21}^{*} + 3A_{22}^{*}\right), \\ G_{164} &= 2Y_{32}Y_{53} \left(A_{11}^{*} + 2A_{12}^{*} + 2$$

$$\begin{split} & G_{167} = -Y_{31} \left(\Phi_{1r}^{*} + 3\Phi_{10}^{*} \right), \quad G_{168} = 2Y_{31} \left(A_{11}^{*} + 2A_{12}^{*} + 2A_{21}^{*} + 3A_{22}^{*} \right), \\ & G_{169} = 2Y_{31}Y_{52} \left(A_{11}^{*} + 2A_{12}^{*} + 2A_{21}^{*} + 3A_{22}^{*} \right) + \frac{16K_{8}H_{44}}{a^{4}}, \\ & G_{1610} = \frac{Y_{32}}{a} \left(C_{21}^{*} + 3C_{22}^{*} + B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 3B_{21}^{*} + 3B_{22}^{*} + C_{11}^{*} + 3C_{12}^{*} \right), \\ & - \frac{Y_{33}}{a^{3}} \left(C_{21}^{*} + C_{22}^{*} + 3B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 3B_{21}^{*} + B_{22}^{*} + 3C_{11}^{*} + 3C_{12}^{*} \right), \\ & G_{1611} = -Y_{32} \left(\Phi_{1r}^{*} + 3\Phi_{10}^{*} \right), \quad G_{1612} = 2Y_{32} \left(A_{11}^{*} + 2A_{12}^{*} + 2A_{21}^{*} + 3A_{22}^{*} \right), \\ & G_{1613} = 2Y_{33} \left(A_{11}^{*} + 2A_{12}^{*} + 2A_{21}^{*} + 3A_{22}^{*} \right), \quad G_{1614} = -Y_{33} \left(\Phi_{1r}^{*} + 3\Phi_{10}^{*} \right), \\ & G_{1613} = \frac{Y_{33}}{a} \left(C_{11}^{*} + 3C_{12}^{*} + C_{21}^{*} + 3C_{22}^{*} + B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + 3B_{21}^{*} + 3B_{22}^{*} \right) \\ & + \frac{Y_{33}}{a^{3}} \left(-3C_{11}^{*} - 3C_{12}^{*} - C_{21}^{*} - C_{22}^{*} - 3B_{11}^{*} - B_{12}^{*} - 3B_{21}^{*} - B_{22}^{*} \right) - \frac{8K_{8}H_{44}}{a^{3}}, \\ & G_{1616} = \frac{1}{a^{3}} \left(3\Phi_{2r}^{*} + \Phi_{20}^{*} \right), \\ & G_{1617} = \frac{1}{a^{3}} \left(-3B_{11}^{*} - B_{12}^{*} - 3C_{11}^{*} - 3C_{12}^{*} - 2D_{22}^{*} + \frac{K_{8}H_{44}}{a^{2}}, \\ & G_{1617} = \frac{1}{a^{3}} \left(-3B_{11}^{*} - A_{12}^{*} - 4D_{21}^{*} - 2D_{22}^{*} + \frac{K_{8}H_{44}}{a^{2}}, \\ & G_{1617} = \frac{2}{a^{3}} \left(A_{11}^{*} + A_{12}^{*} + A_{21}^{*} \right), \quad G_{173} = 2Y_{51}Y_{52} \left(A_{11}^{*} + A_{12}^{*} + A_{22}^{*} \right), \\ & G_{174} = Y_{33}^{*} \left(A_{11}^{*} + A_{12}^{*} + A_{21}^{*} + A_{22}^{*} \right), \\ & G_{175} = 2Y_{51}Y_{52} \left(A_{11}^{*} + A_{12}^{*} + A_{21}^{*} \right), \\ & G_{176} = \frac{Y_{31}}{a} \left(B_{11}^{*} + B_{12}^{*} + B_{22}^{*} + C_{11}^{*} + C_{12}^{*} + C_{21}^{*} + C_{22}^{*} \right), \\ & G_{176} = \frac{Y_{31}}{a} \left(B_{11}^{*} + A_{12}^{*} + A_{21}^{*} \right), \quad G_{179} = 2Y_{52} \left(A_{11}^{*} + A_{12}^{*} + A_{21}^{*} \right), \\ & G_{1710} = \frac{Y_{33}}{a} \left(B_{11}^{*} + A_{12}^{*} + A_{21}^{*} \right), \\ & G_{1715} = \frac{Y_{52}}{a} \left$$

Phụ lục A2

$$\begin{split} T_1 &= \frac{1}{14}G_{111}a^{14} + \frac{1}{12}G_{121}a^{12} + \frac{1}{10}G_{131}a^{10} + \frac{1}{8}G_{141}a^8 + \frac{1}{6}G_{151}a^6 + \frac{1}{4}G_{161}a^4 + \frac{1}{2}G_{171}a^2, \\ T_2 &= \frac{1}{14}G_{112}a^{14} + \frac{1}{12}G_{122}a^{12} + \frac{1}{10}G_{133}a^{10} + \frac{1}{8}G_{143}a^8 + \frac{1}{6}G_{152}a^6 + \frac{1}{4}G_{162}a^4 + \frac{1}{2}G_{172}a^2, \\ T_3 &= \frac{1}{12}G_{123}a^{12} + \frac{1}{10}G_{133}a^{10} + \frac{1}{8}G_{143}a^8 + \frac{1}{6}G_{153}a^6 + \frac{1}{4}G_{163}a^4 + \frac{1}{2}G_{173}a^2, \\ T_4 &= \frac{1}{14}G_{112}a^{14} + \frac{1}{12}G_{124}a^{12} + \frac{1}{10}G_{134}a^{10} + \frac{1}{8}G_{145}a^8 + \frac{1}{6}G_{155}a^6 + \frac{1}{4}G_{165}a^4 + \frac{1}{2}G_{175}a^2, \\ T_5 &= \frac{1}{12}G_{125}a^{12} + \frac{1}{10}G_{133}a^{10} + \frac{1}{8}G_{145}a^8 + \frac{1}{6}G_{155}a^6 + \frac{1}{4}G_{165}a^4 + \frac{1}{2}G_{175}a^2, \\ T_6 &= \frac{1}{10}G_{136}a^{10} + \frac{1}{8}G_{146}a^8 + \frac{1}{6}G_{156}a^6 + \frac{1}{4}G_{166}a^4 + \frac{1}{2}G_{176}a^2, \\ T_7 &= \frac{1}{8}G_{148}a^8 + \frac{1}{6}G_{158}a^6 + \frac{1}{4}G_{168}a^4 + \frac{1}{2}G_{178}a^2, \\ T_8 &= \left(\frac{1}{8}G_{147} - \frac{1}{8}Y_{11}A_{11}^*\Phi_{1r} - \frac{7}{8}Y_{11}A_{12}^*\Phi_{1r} - \frac{1}{8}Y_{11}A_{21}^*\Phi_{10} - \frac{7}{8}Y_{11}A_{22}^*\Phi_{10}\right)a^8 \\ &+ \left(\frac{1}{6}G_{157} - \frac{1}{6}Y_{21}A_{11}^*\Phi_{1r} - \frac{5}{6}Y_{21}A_{12}^*\Phi_{1r} - \frac{1}{4}Y_{31}A_{21}^*\Phi_{10} - \frac{3}{4}Y_{31}A_{22}^*\Phi_{10}\right)a^6 \\ &+ \left(\frac{1}{4}G_{167} - \frac{1}{4}Y_{31}A_{11}^*\Phi_{1r} - \frac{1}{2}Y_{51}A_{12}^*\Phi_{1r} - \frac{1}{4}Y_{31}A_{21}^*\Phi_{10} - \frac{3}{4}Y_{31}A_{22}^*\Phi_{10}\right)a^6 \\ &+ \left(\frac{1}{2}G_{177} - \frac{1}{2}Y_{51}A_{11}^*\Phi_{1r} - \frac{1}{2}Y_{51}A_{12}^*\Phi_{1r} - \frac{1}{2}Y_{51}A_{21}^*\Phi_{10} - \frac{3}{4}Y_{31}A_{22}^*\Phi_{10}\right)a^2, \\ T_9 &= \frac{1}{10}G_{138}a^{10} + \frac{1}{8}G_{1410}a^8 + \frac{1}{6}G_{1510}a^6 + \frac{1}{4}G_{160}a^4 + \frac{1}{2}G_{170}a^2, \\ T_{11} &= \frac{1}{8}G_{1412}a^8 + \frac{1}{6}G_{1512}a^6 + \frac{1}{4}G_{1612}a^4 + \frac{1}{2}G_{171}a^2, \\ T_{12} &= \left(\frac{1}{8}G_{1411} - \frac{1}{8}Y_{12}A_{11}^*\Phi_{1r} - \frac{7}{8}Y_{12}A_{12}^*\Phi_{1r} - \frac{1}{8}Y_{12}A_{21}^*\Phi_{10} - \frac{7}{8}Y_{12}A_{22}^*\Phi_{10}\right)a^8 \\ &+ \left(\frac{1}{6}G_{1511} - \frac{1}{6}A_{11}^*\Phi_{1r}Y_{22} - \frac{5}{6}A_{12}^*\Phi_{1r}Y_{22} - \frac{1}{6}A_{21}^*\Phi_{10}Y_{22} - \frac{5}{6}Y_{22}A_{22}^*$$

$$\begin{split} T_{13} &= \frac{1}{8} G_{1413} a^8 + \frac{1}{6} G_{1515} a^6 + \frac{1}{4} G_{1615} a^4 + \frac{1}{2} G_{1715} a^2, \\ T_{14} &= \frac{1}{6} G_{1513} a^6 + \frac{1}{4} G_{1613} a^4 + \frac{1}{2} G_{1713} a^2, \\ T_{15} &= \left(\frac{1}{6} G_{1514} - \frac{1}{6} Y_{23} \Phi_{1r} A_{11}^* - \frac{5}{6} Y_{23} \Phi_{1r} A_{12}^* - \frac{1}{6} Y_{23} \Phi_{10} A_{21}^* - \frac{5}{6} Y_{23} \Phi_{10} A_{22}^* \right) a^6 \\ &+ \left(\frac{1}{4} G_{1614} - \frac{1}{4} Y_{33} \Phi_{1r} A_{11}^* - \frac{3}{4} Y_{33} \Phi_{1r} A_{12}^* - \frac{1}{4} Y_{33} \Phi_{10} A_{21}^* - \frac{3}{4} Y_{33} \Phi_{10} A_{22}^* \right) a^4 \\ &+ \left(\frac{1}{2} G_{1714} - \frac{1}{2} Y_{52} \Phi_{1r} A_{11}^* - \frac{1}{2} Y_{52} \Phi_{1r} A_{12}^* - \frac{1}{2} Y_{52} \Phi_{10} A_{21}^* - \frac{1}{2} Y_{52} \Phi_{10} A_{22}^* \right) a^2, \\ T_{16} &= \frac{1}{8} G_{1414} a^8 + \frac{1}{6} G_{1516} a^6 + \frac{1}{4} G_{1618} a^4 + \frac{1}{2} G_{1718} a^2, \qquad T_{17} = \frac{1}{4} G_{1617} a^4 + \frac{1}{2} G_{1719} a^2, \\ T_{18} &= \frac{G_{1616} a^4}{4} + \frac{G_{1716} a^2}{2} \\ &+ \left(\frac{1}{4} \pi \Phi_{1r} B_{11}^* - \frac{1}{4} \pi \Phi_{1r} B_{12}^* + \frac{1}{4} \pi \Phi_{10} B_{21}^* - \frac{1}{4} \pi \Phi_{10} B_{22}^* + \frac{1}{4} \pi \Phi_{2r} - \frac{1}{4} \pi \Phi_{20} \right) a, \\ T_{19} &= \frac{G_{1720} a^2}{2}, \qquad T_{20} &= \left(\frac{1}{2} G_{1717} - \frac{1}{2} \Phi_{1r} A_{11}^* - \frac{1}{2} \Phi_{1r} A_{12}^* - \frac{1}{2} \Phi_{10} A_{21}^* - \frac{1}{2} A \Phi_{10} A_{22}^* \right) a^2, \end{aligned}$$

với các hệ số G_{11i} $(i = 1 \rightarrow 3)$, G_{12i} $(i = 1 \rightarrow 5)$, G_{13i} $(i = 1 \rightarrow 8)$, G_{14i} $(i = 1 \rightarrow 14)$, G_{15i} $(i = 1 \rightarrow 16)$, G_{16i} $(i = 1 \rightarrow 18)$, G_{17i} $(i = 1 \rightarrow 20)$ được trình bày trong phụ lục A1.

Phụ lục A3

Các hệ số M_i (*i* = 1→4) trong biểu thức (4.27) xác định được như sau

$$\begin{split} & \left[3T_{19}U_{11}U_{34}a^8 + \left(-3T_{17}U_{11}U_{44} + 6T_{19}U_{11}U_{46} + 4T_{19}U_{21}U_{34}\right)a^6 \\ & + \left(-4T_{17}U_{21}U_{44} + 8T_{19}U_{21}U_{46} + 6T_{19}U_{31}U_{34}\right)a^4 \\ & + \left(-6T_{17}U_{31}U_{44} + 12T_{19}U_{31}U_{46} + 12T_{19}U_{34}U_{41} - 6T_{7}U_{34}U_{44}\right)a^2 \\ M_1 = -\frac{-12T_{17}U_{41}U_{44} + 24T_{19}U_{41}U_{46} + 12T_6U_{44}^2 - 12T_7U_{44}U_{46}\right]}{\left[6T_{19}U_{34}^2a^4 + \left(-12T_{17}U_{44}U_{34} + 24T_{19}U_{34}U_{46}\right)a^2 \\ & + 24T_{16}U_{44}^2 - 24T_{17}U_{14}U_{44} + 24T_{19}U_{24}U_{46}\right)a^2 \\ & + \left(-4T_{17}U_{22}U_{44} + 8T_{19}U_{22}U_{46} + 6T_{19}U_{12}U_{46} + 4T_{19}U_{22}U_{34}\right)a^6 \\ & + \left(-6T_{11}U_{34}U_{44} - 6T_{17}U_{32}U_{44} + 12T_{19}U_{32}U_{46} + 12T_{19}U_{34}U_{42}\right)a^2 \\ M_2 = -\frac{+12T_{10}U_{44}^2 - 12T_{11}U_{44}U_{46} - 12T_{17}U_{42}U_{44} + 24U_{46}U_{42}T_{19}\right]}{\left[6T_{19}U_{34}^2a^4 + \left(-12T_{17}U_{34}U_{44} + 24T_{19}U_{34}U_{46}\right)a^2 \\ & + 24T_{16}U_{44}^2 - 24T_{17}U_{44}U_{46} - 12T_{17}U_{43}U_{46} + 6T_{19}U_{33}U_{34}\right)a^4 \\ & + \left(-6T_{14}U_{34}U_{44} - 6T_{17}U_{33}U_{44} + 8T_{19}U_{23}U_{46} + 6T_{19}U_{33}U_{34}\right)a^4 \\ & + \left(-6T_{14}U_{34}U_{44} - 6T_{17}U_{33}U_{44} + 8T_{19}U_{23}U_{46} + 6T_{19}U_{33}U_{34}\right)a^4 \\ & + \left(-6T_{14}U_{34}U_{44} - 6T_{17}U_{33}U_{44} + 8T_{19}U_{23}U_{46} + 6T_{19}U_{33}U_{34}\right)a^4 \\ & + \left(-6T_{14}U_{34}U_{44} - 6T_{17}U_{33}U_{44} + 8T_{19}U_{23}U_{46} + 24T_{19}U_{33}U_{44}\right)a^2 \\ M_3 = -\frac{+12T_{13}U_{44}^2 - 12T_{14}U_{44}U_{46} - 12T_{17}U_{43}U_{44} + 24T_{19}U_{43}U_{46}\right)a^2 \\ & + 24T_{16}U_{44}^2 - 24T_{17}U_{44}U_{46} + 24T_{19}U_{46}^2 \right] \\ \begin{bmatrix} \left(12T_{19}U_{34}U_{45} - 6T_{20}U_{34}U_{44}\right)a^2 \\ \left[\left(12T_{19}U_{34}U_{45} - 6T_{20}U_{34}U_{44}\right)a^2 \\ \left[\left(12T_{19}U_{34}U_{45} - 6T_{20}U_{34}U_{44}\right)a^2 \\ \left[\left(12T_{19}U_{34}U_{45} + 12T_{18}U_{44}^2 + 24T_{19}U_{45}U_{46} - 12T_{20}U_{44}U_{46}\right\right] \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

với các hệ số T_j (j = 1→21) được trình bày cụ thể trong phụ lục A2.

Phụ lục A4

Các hệ số C_i $(i = 1 \rightarrow 9)$ và N_j $(j = 1 \rightarrow 4)$ trong biểu thức (4.28) xác định như sau

$$\begin{split} &C_1 = \frac{T_{19}U_{11}^2}{4U_{44}^2}a^{12} + \frac{2T_{19}U_{11}U_{21}}{3U_{44}^2}a^{10} + \frac{1}{9U_{44}^2}\Big[9T_{19}U_{11}\big(M_1U_{34} + U_{31}\big) + 4T_{19}U_{21}^2\Big]a^8 \\ &+ \Big[\frac{6T_{19}\big(M_1U_{46} + U_{41}\big)U_{21} + 3T_{19}\big(M_1U_{34} + U_{31}\big)^2}{3U_{44}^2} - \frac{4T_7U_{21} + 4T_{17}M_1U_{21}}{3U_{44}}\Big]a^6 \\ &+ \Big[\frac{8T_{19}\big(M_1U_{46} + U_{41}\big)\big(M_1U_{34} + U_{31}\big)}{3U_{44}^2} - \frac{2(T_{17}M_1 + T_7)\big(M_1U_{34} + U_{31}\big)}{3U_{44}}\Big]a^2 \\ &+ \Big[\frac{4T_{19}\big(M_1U_{46} + U_{41}\big)\big(M_1U_{34} + U_{31}\big)}{U_{44}^2} - \frac{2(T_{17}M_1 + T_7)\big(M_1U_{44} + U_{31}\big)}{U_{44}}\Big]a^2 \\ &+ \frac{4T_{19}\big(M_1U_{46} + U_{41}\big) - 4\big(T_{17}M_1 + T_7\big)\big(M_1U_{46} + U_{41}\big)}{U_{44}} + 4T_{16}M_1^2 + 4T_6M_1 + 4T_1, \\ C_2 &= \frac{1}{24U_{44}^2}\Big\{9T_{19}U_{11}U_{12}a^{12} + 12T_{19}\big(U_{11}U_{22} + U_{12}U_{21}\big)a^{10} \\ &+ 18\Big(U_{11}U_{34}M_2 + U_{12}U_{34}M_1 + U_{11}U_{32} + U_{12}U_{31} + \frac{8}{9}U_{21}U_{22}\Big)T_{19}a^8 \\ &+ \Big[\frac{(36U_{12}U_{46} + 24U_{22}U_{34}\big)M_1 + T_{19}\big(36U_{11}U_{46} + 24U_{21}U_{34}\big)M_2}{-18U_{44}\big(M_1T_{17}U_{12} + M_2T_{17}U_{11} + T_{11}U_{11} + T_7U_{12}\big)} \Big]a^6 \\ &+ \Big[\frac{\big((144M_2U_{46} + 24U_{22}U_{41} + 36U_{32}U_{34}\big)T_{19}M_1 + \big(48U_{21}U_{46} + 36U_{31}U_{34}\big)T_{19}M_2}{-24U_{44}\big(M_1T_{17}U_{22} + M_2T_{17}U_{11} + T_{11}U_{21} + T_7U_{22}\big)} \Big]a^6 \\ &+ \Big[\frac{\big((144M_2U_{34}U_{46} + 72U_{34}U_{46})M_2 + 72U_{34}U_{42}\big)M_1}{-36U_{44}\Big(\big(\frac{(2M_2T_{17}U_{34} + T_{10}U_{34} + T_{10}U_{32}\big)M_1}{+\big(T_{17}U_{31} + T_{7}U_{34}\big)M_2 + T_{2U_{32}U_{41}}\Big)} \Big]a^2 \\ &- 72U_{44}^2\Big[\big(-2M_2T_{16} - T_{10}\big)M_1 - T_6M_2 - T_2\Big] \\ &- 72U_{44}^2\Big[\big(-2M_2T_{16} - T_{10}\big)M_1 - T_6M_2 - T_2\Big] \\ &- 72U_{44}^2\Big[\big(-2M_2T_{17}U_{46} + T_{11}U_{46} + T_{17}U_{42}\big)M_1 + \big(T_{17}U_{41} + T_7U_{46}\big)M_2 + U_{41}T_{11} + U_{42}T_7\Big] \\ &+ 144\big(M_2U_{46} + U_{42}\big)\big(M_1U_{46} + U_{41}\big)T_{19}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{split} &C_{3} = \frac{1}{12U_{44}^{24}} \Biggl\{ 6T_{19}U_{11}U_{22}a^{10} + 9 \Biggl(U_{11}U_{34}M_{3} + U_{11}U_{33} + \frac{8}{9}U_{21}U_{23} \Biggr) T_{19}a^{8} \\ &+ \Biggl[\Biggl(\frac{(18U_{11}U_{46} + 12U_{21}U_{34})M_{3}}{(+12U_{22}U_{34}M_{1} + 18U_{11}U_{43} + 12U_{21}U_{33} + 12U_{23}U_{31} \Biggr) T_{19} \Biggr] a^{6} \\ &- 9U_{11}U_{44}(M_{3}T_{17} + T_{14}) \Biggr\} a^{4} \\ &+ \Biggl[\Biggl(\frac{(18M_{11}U_{44}^{2} + 24U_{21}U_{46} + 18U_{31}U_{34})M_{3}}{(+(24U_{23}U_{46} + 18U_{33}U_{34})M_{1} + 24U_{21}U_{43} + 24U_{23}U_{41} + 18U_{31}U_{33} \Biggr) T_{19} \Biggr] a^{4} \\ &+ \Biggl[\Biggl(\frac{(12M_{11}U_{22} + M_{3}T_{11}U_{21} + T_{14}U_{21} + T_{7}U_{23}) \\ &+ \Biggl[\Biggl(\frac{(22M_{11}U_{13}U_{46} + 36U_{34}U_{43})M_{1} + 26U_{31}U_{43} + 36U_{41}U_{33} \Biggr) T_{19} \\ &+ \Biggl[\Biggl(\frac{(2M_{11}T_{17}U_{34} + T_{17}U_{31} + T_{7}U_{34})M_{3} \\ &+ (16U_{33}U_{46} + 36U_{34}U_{43})M_{1} + 36U_{31}U_{43} + 36U_{41}U_{33} \Biggr) T_{19} \\ &- 18U_{44} \Biggl((\frac{(2M_{11}T_{17}U_{44} + T_{17}U_{31} + T_{7}U_{34})M_{3} \\ &+ (T_{14}U_{46} + T_{17}U_{43})M_{1} + U_{41}T_{14} + T_{7}U_{33} \Biggr) \Biggr] a^{2} \\ &- 36U_{44} \Biggr[\Biggl((2M_{11}T_{17}U_{46} + T_{17}U_{41} + T_{7}U_{46})M_{3} \\ &+ (T_{14}U_{46} + T_{17}U_{43})M_{1} + U_{41}T_{14} + T_{7}U_{43} \Biggr) \Biggr] \\ &+ T2(M_{3}U_{46} + U_{43})(M_{1}U_{46} + U_{41})T_{19} \Biggr\}, \\ C_{4} &= \frac{1}{72U_{44}^{2}} \Biggl\{ 9T_{19}U_{12}^{2}a^{12} + 24T_{19}U_{12}U_{22}a^{10} + 16T_{19} \Biggl(\frac{9}{4}U_{34}M_{2}U_{12} + U_{22}^{2} + \frac{9}{4}U_{32}U_{12} \Biggr) a^{8} \\ &+ \Biggl[\Biggl((72U_{12}U_{46} + 48U_{34}U_{22})M_{2} + 48U_{22}U_{23} + 72U_{42}U_{12})T_{19} \Biggr] a^{6} \\ &+ \Biggl[\Biggl((72U_{12}U_{46} + 48U_{34}U_{22})M_{2} + 48U_{22}U_{22} + 72U_{42}U_{12})T_{19} \Biggr] a^{4} \\ &+ \Biggl[\Biggl(\frac{36U_{34}^{2}M_{2}^{2} + (96U_{22}U_{46} + 72U_{32}U_{34})M_{2} + 96U_{22}U_{42} + 36U_{32}^{2} \Biggr) T_{19} \Biggr] a^{4} \\ &+ \Biggl[\Biggl(4U_{2}U_{44} + U_{132} \Biggr) \Biggl[\Biggl(M_{2}U_{46} + U_{42} \Biggr) T_{19} - \frac{U_{44}(T_{17}M_{2} + T_{11} \Biggr) \Biggr] a^{2} \\ &- 144U_{44} \Biggl[\Biggl(-T_{16}U_{44} + T_{17}U_{46})M_{2}^{2} \\ &+ (-T_{10}U_{44} + T_{11}U_{46} + T_{17}U_{42} \Biggr) M_{2} + U_{42}T_{11} - T_{4}U_{44} \Biggr] \\ \\ &+ 144(M_{2}U_{46} + U_{42} \Biggr)^{2} T_{19}^{2} \Biggr$$

$$\begin{split} C_{5} &= \frac{1}{18U_{44}^{24}} \Biggl\{ 6T_{19}U_{12}U_{23}a^{10} + 9 \Biggl(U_{12}U_{34}M_{3} + U_{12}U_{33} + \frac{8}{9}U_{22}U_{23} \Biggr) T_{19}a^{8} \\ &+ \Biggl[\Biggl(18U_{12}U_{46} + 12U_{22}U_{33} + 12U_{23}U_{32} \Biggr) T_{19} - 9U_{12}U_{44} (T_{17}M_{3} + T_{14}) \Biggr]a^{6} \\ &+ \Biggl[\Biggl(18M_{2}U_{34}^{2} + 24U_{22}U_{46} + 18U_{32}U_{34} \Biggr) M_{3} + (24U_{23}U_{46} + 18U_{33}U_{34}) M_{2} \Biggr) T_{19} \Biggr] a^{4} \\ &+ \Biggl[\Biggl(12M_{2}U_{34}^{2} + 24U_{22}U_{46} + 18U_{32}U_{34} \Biggr) M_{3} + (24U_{23}U_{46} + 18U_{33}U_{34}) M_{2} \Biggr) T_{19} \Biggr] a^{4} \\ &+ \Biggl[\Biggl(12M_{2}U_{34}^{2} + 24U_{22}U_{43} + 24U_{22}U_{46} + 18U_{32}U_{33} \Biggr) T_{19} \Biggr] a^{4} \\ &+ \Biggl[\Biggl((12M_{2}U_{34}^{2} + 24U_{23}U_{42} + 18U_{32}U_{43} + 7_{14}U_{22}) \Biggr) T_{19} \Biggr] a^{2} \\ &+ \Biggl[\Biggl((12M_{2}U_{34}U_{46} + 36U_{34}U_{43}) M_{2} + 36U_{32}U_{43} + 36U_{42}U_{33} \Biggr) T_{19} \Biggr] a^{2} \\ &+ \Biggl[\Biggl((12M_{2}T_{17}U_{34} + T_{11}U_{34} + T_{17}U_{32}) M_{3} \Biggr] + \Biggl((12M_{2}T_{16} - T_{10}) M_{3} - T_{13}M_{2} - T_{5}) U_{44} \Biggr] \\ &+ \Biggl[\Biggl((12M_{2}T_{17}U_{44} + T_{17}U_{33}) M_{2} + U_{22}T_{14} + T_{11}U_{33} \Biggr) \Biggr] a^{2} \\ &+ \Biggl[\Biggl((12M_{2}T_{16} - T_{10}) M_{3} - T_{13}M_{2} - T_{5}) U_{44} \Biggr] \\ &+ \Biggl(2M_{2}U_{10}U_{46} + U_{42}) T_{19} \Biggr] a^{6} \\ &+ \Biggl[- 3U_{11} (T_{17}M_{4} + T_{20}) U_{44} + 6T_{19} \Biggl(\Biggl(U_{11}U_{46} + \frac{2U_{21}U_{34}}{3} \Biggr) M_{4} + U_{11}U_{45} \Biggr) \Biggr] a^{6} \\ &+ \Biggl[\Biggl(- 12M_{11}T_{17}M_{4} + T_{20}) U_{44} + 8T_{19} \Biggl(\Biggl(\frac{3}{4}U_{34}^{2}M_{1} + U_{21}U_{46} + \frac{3}{4}U_{31}U_{34} \Biggr) M_{4} + U_{21}U_{45} \Biggr) \Biggr] a^{4} \\ &+ \Biggl[\Biggl((-12M_{1}T_{17}U_{44} - 6T_{17}U_{13} - 6T_{7}U_{34}) M_{4} - 6T_{20} (M_{1}U_{34} + U_{31}) \Biggr) \Biggr] a^{2} \\ &+ \Biggl[\Biggl((2M_{11}U_{46} - 12T_{17}U_{41} - 12T_{7}U_{46}) M_{4} + U_{12}U_{45} \Biggr) \Biggr] u^{4} \\ &+ \Biggl[\Biggl((-22M_{1}T_{10}U_{46} - 12T_{17}U_{41} - 12T_{7}U_{46}) M_{4} \\ &+ \Biggl(\Biggl(-22M_{1}T_{10}U_{46} - 12T_{17}U_{41} - 12T_{7}U_{46}) M_{4} \\ &+ \Biggl(\Biggl((-22M_{1}T_{10}U_{46} - 12T_{17}U_{41} - 12T_{7}U_{46}) M_{4} \\ &+ \Biggl(\Biggl(-22M_{1}T_{10}U_{46} - 12T_{17}U_{41} - 12T_{7}U_{46}) M_{4} \\ &+ \Biggl(\Biggl(-22M_{1}T_{10}U_{46} - 1$$

$$\begin{split} &C_{7} = \frac{2T_{19}U_{23}^{2}a^{8}}{9U_{44}^{2}} + \frac{1}{3U_{44}^{2}} \Big(2U_{34}T_{19}U_{23}M_{3} + 2T_{19}U_{23}U_{33} \Big) a^{6} \\ &+ \frac{1}{6U_{44}^{2}} \begin{cases} 3M_{3}^{2}T_{19}U_{34}^{2} + \Big[(8U_{22}U_{46} + 6U_{33}U_{34} \big) T_{19} - 4U_{44}T_{17}U_{23} \Big] M_{3} \\ &+ \frac{1}{6U_{44}^{2}} \begin{cases} -U_{34} \Big(T_{17}U_{44} - 2T_{19}U_{46} \Big) M_{3}^{2} + 2U_{33} \Big(U_{43}T_{19} - \frac{T_{14}U_{44}}{2} \Big) \\ &+ \Big[(2U_{33}U_{46} + 2U_{34}U_{43} \big) T_{19} - U_{44} \Big(T_{14}U_{34} + T_{17}U_{33} \big) \Big] M_{3} \\ &+ \frac{1}{U_{44}^{2}} \begin{cases} \Big\{ 2T_{16}U_{44}^{2} - 2T_{17}U_{44}U_{46} + 2T_{19}U_{46}^{2} \Big\} M_{3}^{2} \\ &+ \Big[(2U_{19}U_{43}^{2} - 2T_{17}U_{44}U_{46} + 2T_{19}U_{46}^{2} \Big) M_{3}^{2} \\ &+ \frac{1}{U_{44}^{2}} \begin{cases} \Big\{ 2T_{19}U_{43}^{2} - 2T_{14}U_{43}U_{44} + 2T_{9}U_{44}^{2} \Big\} \\ &+ 2\Big[\Big(U_{12}U_{46} + \frac{2U_{22}U_{34}}{3} \Big) M_{4} + U_{12}U_{45} \Big] T_{19} \\ \end{bmatrix} a^{6} \\ &+ \frac{1}{3U_{44}^{2}} \begin{cases} -U_{22} \Big(M_{4}T_{17} + T_{20} \Big) U_{44} \\ &+ 2\Big[\Big(U_{12}U_{46} + \frac{2U_{22}U_{34}}{3} \Big) M_{4} + U_{12}U_{45} \\ \end{bmatrix} T_{19} \\ \end{bmatrix} a^{6} \\ &+ \frac{1}{12U_{44}^{2}} \begin{cases} \Big[\Big(-12M_{2}T_{17}U_{34} - 6T_{11}U_{34} - 6T_{17}U_{32} \Big) M_{4} - 6T_{20} \Big(M_{2}U_{34} + U_{32} \Big) \Big] U_{44} \\ \\ &+ 2\Big[\Big(2M_{2}U_{13}U_{46} + U_{22}U_{46} + \frac{3}{4}U_{32}U_{34} \Big) M_{4} + U_{45} \Big(M_{2}U_{34} + U_{32} \Big) \Big] U_{44} \\ \\ &+ \frac{1}{12U_{44}^{2}} \begin{cases} \Big[\Big(-12M_{2}T_{17}U_{34} - 6T_{11}U_{34} - 6T_{17}U_{32} \Big) M_{4} - 6T_{20} \Big(M_{2}U_{34} + U_{32} \Big) \Big] U_{44} \\ \\ &+ \frac{1}{12U_{44}^{2}} \begin{cases} \Big[\Big(-2M_{2}T_{17}U_{46} - T_{11}U_{46} - T_{17}U_{42} \Big) M_{4} \\ \\ &+ \frac{1}{U_{44}} \begin{cases} \Big[\Big(-2M_{2}T_{17}U_{46} - T_{11}U_{46} - T_{17}U_{42} \Big) M_{4} \\ \\ &+ \frac{1}{U_{44}^{2}} \begin{cases} \Big[2T_{19} \Big(M_{4}U_{46} + U_{45} \Big) \Big(M_{2}U_{46} + U_{42} \Big) \Big] + \Big(2M_{2}T_{16} + T_{10} \Big) M_{4} + T_{18}M_{2} + T_{12} , \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{split} C_{9} &= \frac{T_{19}M_{4}U_{34}U_{23}a^{6}}{3U_{44}^{2}} \\ &+ \frac{1}{3U_{44}^{2}} \begin{bmatrix} (-T_{17}M_{4}U_{23} - T_{20}U_{23})U_{44} + T_{19} \Big(\frac{3U_{34}M_{3}}{2} + \frac{3U_{33}}{2} \Big) M_{4}U_{34} \\ &+ T_{19}U_{23} \big(2M_{4}U_{46} + 2U_{45} \big) \end{bmatrix} a^{4} \\ &+ \frac{1}{6U_{44}^{2}} \begin{cases} \begin{bmatrix} (-6M_{3}T_{17}U_{34} - 3T_{14}U_{34} - 3T_{17}U_{33})M_{4} - 3T_{20} \big(U_{34}M_{3} + U_{33} \big) \Big] U_{44} \\ &+ 2T_{19} \big(3M_{3}U_{46} + 3U_{43} \big) M_{4}U_{34} \\ &+ 2T_{19} \Big(\frac{3U_{34}M_{3}}{2} + \frac{3U_{33}}{2} \Big) \Big(2M_{4}U_{46} + 2U_{45} \big) \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{U_{44}^{2}} \Big[2T_{19} \big(M_{3}U_{46} + U_{43} \big) \big(M_{4}U_{46} + U_{45} \big) \Big] \\ &+ \frac{1}{U_{44}} \begin{bmatrix} (-2U_{46}M_{3}T_{17} - U_{46}T_{14} - U_{43}T_{17} \big) M_{4} \\ &+ (-T_{17}U_{45} - T_{20}U_{46} \big) M_{3} - T_{20}U_{43} - T_{14}U_{45} \end{bmatrix} \\ &+ \big(2M_{3}T_{16} + T_{13} \big) M_{4} + T_{18}M_{3} + T_{15}, \\ N_{1} &= -\frac{\pi a^{2}}{9}, N_{2} &= -\frac{a^{2}}{5}, N_{3} &= -\frac{4}{3}, N_{4} &= \frac{a^{2}}{3}, \\ \text{với các hệ số } T_{i} (i &= 1 \rightarrow 21) \text{ dược trình bày cụ thể trong phụ lục A2 và các hệ số } M_{j} \end{split}$$

 $(j = 1 \rightarrow 4)$ được trình bày cụ thể trong phụ lục A3.